* Números Complexos *

Até o Séc. $\overline{XVI}$ os matemáticos, que eram essencialmente geômetras, não davam importância aos números do tipo $\sqrt{-9}$, aos quais chamavam de "números fictícios" e consideravam "tão sutis quanto inúteis".

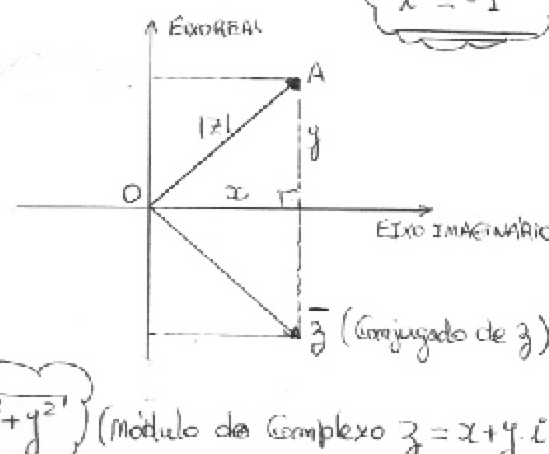
Em 1545 o médico e matemático italiano Jerônimo Cardano publicou o livro "ARS MAGNA", no qual, dentre outras coisas, mostrava a resolução de equações do 3º grau. Aplicando a fórmula de Cardano à equação $x^3 = 15x + 4$, a solução ficava $x = \sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$. Por substituição direta, sabiam que $x = 4$ é raiz inteira da equação. Esses resultados tiveram o mérito de chamar a atenção para as raízes quadradas de números negativos.

Em finais do Séc. $\overline{XVIII}$, os matemáticos Wessel, Gauss e Argand formalizaram a teoria dos números complexos, tal como é feito atualmente (par ordenado de números reais), representados por pontos de um plano (plano de Argand-Gauss-Wessel), com dois eixos perpendiculares (o eixo da parte real e o eixo da parte imaginária).

Em coordenadas retangulares, temos: $\boxed{z = x + y \cdot i}$,

onde $\begin{cases} \underline{\underline{x}} \text{ é a parte real de } z \\ \underline{\underline{y}} \text{ é a parte imaginária de } z \\ \underline{\underline{i}} \text{ é a unidade imaginária.} \end{cases}$

Importante: $\begin{pmatrix} i = \sqrt{-1} \\ i^2 = -1 \end{pmatrix}$ fique ligado!



Temos, então

$z = x + y \cdot i$

$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

$\bar{z} = x - y \cdot i$

Note bem: $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ (Módulo do Complexo $z = x + y \cdot i$)

Exercícios Resolvidos (Coord. retangulares)

(X)

1) $(3+2i)+(-7-i) = (3-7)+(2-1)\cdot i = -4+i$

Não esqueça! $\boxed{i^2 = -1}$

2) $(2-3i)\cdot(4+2i) = 8+4i-12i+6 = 14-8i$

3) $\dfrac{5+5i}{3-4i} + \dfrac{20}{4+3i} = \dfrac{(5+5i)(3+4i)}{(3-4i)(3+4i)} + \dfrac{20(4-3i)}{(4+3i)(4-3i)} =$

$= \dfrac{15+20i+15i-20}{25} + \dfrac{80-60i}{25} = \dfrac{75-25i}{25} = 3-i$

Importante: $\boxed{(a+b\cdot i)\cdot(a-b\cdot i) = a^2+b^2}$

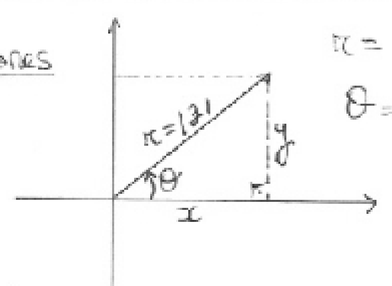
4) Dados os complexos $\begin{cases} z_1 = 2+i \\ z_2 = 3-2i \\ z_3 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot i \end{cases}$, calcular:

a) $|3\cdot z_1 - 4\cdot z_2| = |6+3i-12+8i| = |-6+11i| = \sqrt{36+121} = \sqrt{157}$

b) $(\bar{z}_1)^2 = (2-i)^2 = 4-4i-1 = 3-4i$

c) $|z_3| = \left|-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot i\right| = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}} = 1$

Coordenadas Polares



$r = \text{mód.}\, z = \sqrt{x^2+y^2}$

θ = argumento de z

$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{x}{r} \Rightarrow x = r\cdot\cos\theta \\ \text{sen}\,\theta = \dfrac{y}{r} \Rightarrow y = r\cdot\text{sen}\,\theta \end{cases}$

Como $z = x+y\cdot i \Rightarrow z = r\cdot\cos\theta + r\cdot\text{sen}\,\theta\cdot i$

Coordenadas Polares: $z = r\cdot(\cos\theta + i\cdot\text{sen}\,\theta)$, ou $z = r\cdot\text{cis}\,\theta$ (abreviado)

onde $r = \sqrt{x^2+y^2}$

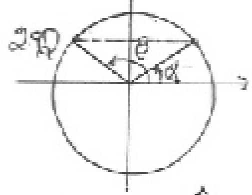
$\boxed{0 < \theta \leq 2\pi}$ ou $\boxed{0^\circ < \theta \leq 360^\circ}$ Note bem!

Formulário de Trigonometria (guarde bem)

$$\begin{cases} \operatorname{sen}(a \pm b) = \operatorname{sen}a \cdot \cos b \pm \operatorname{sen}b \cdot \cos a \\ \cos(a \pm b) = \cos a \cdot \cos b \mp \operatorname{sen}a \cdot \operatorname{sen}b \end{cases} \qquad \begin{cases} \operatorname{sen} 2a = 2 \cdot \operatorname{sen}a \cdot \cos a \\ \cos 2a = \cos^2 a - \operatorname{sen}^2 a \end{cases}$$

$$* \ \operatorname{sen}^2 a + \cos^2 a = 1 \ *$$

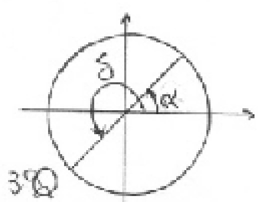
Mudança de quadrantes



$\alpha^\circ + \beta^\circ = 180^\circ$

$\beta^\circ = 180^\circ - \alpha^\circ$

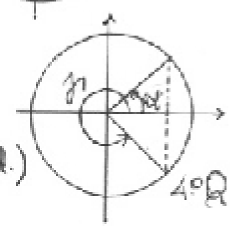
ou $\beta = \pi - \alpha$ (rad.)



$\delta^\circ - \alpha^\circ = 180^\circ$

$\delta^\circ = 180^\circ + \alpha^\circ$

ou $\delta = \pi + \alpha$ (rad.)



$\gamma^\circ + \alpha^\circ = 360^\circ$

$\gamma^\circ = 360^\circ - \alpha^\circ$

ou $\gamma = 2\pi - \alpha$ (rad.)

Mudança de coord. retangulares para coord. polares:

Dado $z = x + y \cdot i$ (coord. retangulares) para determinar $\begin{cases} r = |z| \\ \theta = \arg(z) \end{cases}$ coord. polares, siga o seguinte caminho:

1º) Calcule $|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}$

2º) Ache $\alpha = \operatorname{arc\,sen}\left|\left(\frac{y}{r}\right)\right|$ (não leve em conta o sinal de y)

α é o ângulo do 1º quadrante; para determinar o argumento θ, localize o quadrante onde está o complexo z (basta prestar atenção aos sinais de x e y) e use uma das 3 fórmulas mostradas acima.

Exemplos: Escreva em coord. polares cada complexo (use 2 casas decimais)

1) $z = 1 - i$ $\quad \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}$ (4ºQ) $\quad r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

$\alpha^\circ = \operatorname{arc\,sen}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \Rightarrow \alpha = 45^\circ$

$\theta^\circ = 360^\circ - 45^\circ = 315^\circ$

$z = \sqrt{2} \cdot \operatorname{Cis}(315^\circ)$

2) $z = -\sqrt{3} + i$ $\quad \begin{cases} x = -\sqrt{3} \\ y = 1 \end{cases}$ (2ºQ) $\quad r = \sqrt{3 + 1} = 2$

$\alpha^\circ = \operatorname{arc\,sen}\left(\frac{1}{2}\right) = 30^\circ$

$\theta^\circ = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$

$z = 2 \operatorname{Cis}(150^\circ)$

XII

3) Sendo $z = -3 + 3i$, escreva, em coord. polares, $\bar{z}$

$\bar{z} = -3 - 3i \begin{cases} x = -3 \\ y = -3 \end{cases}$ (3ºQ) $\quad r = \sqrt{9+9} = \sqrt{18}$

$\alpha° = \text{arcsen}\left(\frac{3}{\sqrt{18}}\right) = 45°$

$\boxed{\bar{z} = \sqrt{18} \cdot \text{Cis}(225°)}$ $\quad \theta° = 180° + 45° = 225°$

* Fórmulas de De Moivre * (1667 - 1754)

Sendo $z_1 = r_1 \cdot (\cos\theta_1 + i \cdot \text{sen}\,\theta_1) = r_1 \cdot \cos\theta_1 + i \cdot r_1 \cdot \text{sen}\,\theta_1$

$z_2 = r_2 \cdot (\cos\theta_2 + i \cdot \text{sen}\,\theta_2) = r_2 \cdot \cos\theta_2 + i \cdot r_2 \cdot \text{sen}\,\theta_2$, teremos:

$z_1 \cdot z_2 = (r_1 \cdot \cos\theta_1 \cdot r_2 \cdot \cos\theta_2 + i \cdot r_1 \cdot \cos\theta_1 \cdot r_2\, \text{sen}\,\theta_2 + i \cdot r_1\, \text{sen}\,\theta_1 \cdot r_2 \cdot \cos\theta_2 - r_1 \cdot r_2 \cdot \text{sen}\,\theta_1 \cdot \text{sen}\,\theta_2)$, pois $\boxed{i^2 = -1}$

$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \left[\underbrace{\cos\theta_1 \cdot \cos\theta_2 - \text{sen}\,\theta_1 \cdot \text{sen}\,\theta_2}_{\cos(\theta_1 + \theta_2)}\right] + i \cdot r_1 \cdot r_2 \left[\underbrace{\cos\theta_1 \cdot \text{sen}\,\theta_2 + \text{sen}\,\theta_1 \cdot \cos\theta_2}_{\text{sen}(\theta_1 + \theta_2)}\right]$

Então $\boxed{z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2\, \text{Cis}(\theta_1 + \theta_2)}$; $\left\{\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \cdot \text{Cis}(\theta_1 - \theta_2)\right\}$ $z_2 \neq 0$

Sendo $z = r \cdot \text{Cis}\,\theta$, então

$$\begin{cases} z^n = r^n \cdot \text{Cis}(n \cdot \theta) \\ z^{1/n} = r^{1/n}\, \text{Cis}\left(\dfrac{\theta + 360° \cdot K}{n}\right) \\ K = 0, 1, 2, \dots n-1 \end{cases}$$

As fórmulas de De Moivre só podem ser usadas em coord. polares, e são de fundamental importância na potenciação e radiciação de complexos.

Exercícios resolvidos

1) Sendo $\begin{cases} z_1 = -2 - 2i \\ z_2 = 1 + \sqrt{3}\, i \end{cases}$, calcule, com 2 casas decimais, $z_1 \cdot \bar{z}_2$

$z_1 = -2 - 2i \begin{cases} x = -2 \\ y = -2 \end{cases}$ (3ºQ) e $\quad r = \sqrt{4+4} = \sqrt{8}$

$\alpha° = \text{arcsen}\left(\frac{2}{\sqrt{8}}\right) = 45° \Rightarrow \theta° = 180° + 45° = 225°$

$\boxed{z_1 = \sqrt{8} \cdot \text{Cis}(225°)}$ $\quad \bar{z}_2 = 1 - \sqrt{3} \cdot i \begin{cases} x = 1 \\ y = -\sqrt{3} \end{cases}$ (4ºQ) e $\quad r = 2$

$\alpha° = \text{arcsen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$\alpha° = 60°$

$\theta° = 360° - 60° = 300°$

$\boxed{\bar{z}_2 = 2 \cdot \text{Cis}(300°)}$ $\quad z_1 \cdot \bar{z}_2 = \sqrt{8} \cdot 2 \cdot \text{Cis}(225° + 300°)$

$\boxed{z_1 \cdot z_2 = 2\sqrt{8} \cdot \text{Cis}(165°)}$

OBS: O argumento de $z_1 \cdot \bar{z}_2$ era $525°$, o que contraria a condição $(0° < \theta° \leq 360°)$; por isso, fizemos $\theta° = 525° - \underset{(1\ volta)}{360°} = 165°$, entendido? XIII

2) Sendo $\begin{cases} z_1 = 2+3i \\ z_2 = 5-i \\ z_3 = -\sqrt{2} - \sqrt{2}\cdot i \end{cases}$, ache o complexo $z = \dfrac{(z_1)^4 \cdot (z_2)^3}{(z_3)^5}$

$z_1 = 2+3i$ $\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \\ (1°Q) \end{cases}$ e $r = \sqrt{13}$, $\alpha = \operatorname{arcsen}\left(\frac{3}{\sqrt{13}}\right) = 56°,31 \Rightarrow z_1 = \sqrt{13}\cdot \operatorname{Cis}(56°,31)$

$z_2 = 5-i$ $\begin{cases} x = 5 \\ y = -1 \\ (4°Q) \end{cases}$ e $r = \sqrt{26}$, $\alpha = \operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{\sqrt{26}}\right) = 11°,31 \Rightarrow \theta° = 348°,69 \Rightarrow z_2 = \sqrt{26}\cdot \operatorname{Cis}(348°,69)$

$z_3 = -\sqrt{2} - \sqrt{2}\cdot i$ $\begin{cases} x = -\sqrt{2} \\ y = -\sqrt{2} \\ (3°Q) \end{cases}$ e $r = 2$, $\alpha = \operatorname{arcsen}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 45° \Rightarrow \theta° = 225° \Rightarrow z_3 = 2\cdot \operatorname{Cis}(225°)$

$$\therefore z = \frac{[\sqrt{13}\cdot \operatorname{Cis}(56°,31)]^4 \cdot [\sqrt{26}\cdot \operatorname{Cis}(348°,69)]^3}{[2\cdot \operatorname{Cis}(225°)]^5} = \frac{(\sqrt{13})^4 (\sqrt{26})^3}{2^5} \operatorname{Cis}\begin{pmatrix} 4\cdot 56°,31 + \\ 3\cdot 348°,69 - \\ 5\cdot 225° \end{pmatrix}$$

$$z = 700,16 \cdot \operatorname{Cis}(146°,31)$$

3) Ache os complexos $z_i = \sqrt[4]{2-3i}$ $\quad z = 2-3i$ $(4°Q)$ $\begin{cases} r = \sqrt{13} \\ \alpha = 56°,31 \\ \theta = 303°,69 \end{cases}$

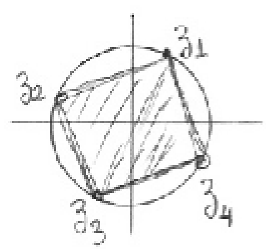
$$z = \sqrt{13}\cdot \operatorname{Cis}(303°,69) \Rightarrow z^{1/4} = (\sqrt{13})^{1/4}\cdot \operatorname{Cis}\left(\frac{303°,69 + K\cdot 360°}{4}\right)$$

$K = 0 \Rightarrow z_1 = 1,38\cdot \operatorname{Cis}(75°,92)$

$K = 1 \Rightarrow z_2 = 1,38\cdot \operatorname{Cis}(165°,92)$

$K = 2 \Rightarrow z_3 = 1,38\cdot \operatorname{Cis}(255°,92)$

$K = 3 \Rightarrow z_4 = 1,38\cdot \operatorname{Cis}(345°,92)$



Fórmulas de Euler (1707 - 1783)

XIV

No Capítulo "Séries de Taylor" iremos mostrar que: 1) $e^x \cong 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$

2) $\operatorname{sen} x \cong x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots$

3) $\cos x \cong 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots$

Se fizermos $x = i\theta$, na fórmula 1), teremos:

$$e^{i\theta} \cong 1 + i\theta + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \frac{(i\theta)^5}{5!} + \cdots = 1 + i\theta - \frac{\theta^2}{2!} - \frac{i\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + \frac{i\theta^5}{5!} - \cdots$$

$$e^{i\theta} \cong \underbrace{\left[1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \cdots\right]}_{\cos\theta} + i \cdot \underbrace{\left[\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \cdots\right]}_{\operatorname{sen}\theta}$$

Note bem! $e^{i\theta} = \cos\theta + i.\operatorname{sen}\theta$

OBS $\begin{cases} i^2 = -1 \\ i^3 = -i \\ i^4 = +1 \\ i^5 = +i \end{cases}$

Exercícios

Usando a fórmula de Euler: $e^{i\theta} = \cos\theta + i.\operatorname{sen}\theta$, mostre que:

1) $\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$; 2) $\operatorname{sen}\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$

3) $e^{\pi . i} + 1 = 0$; 4) $(i)^i = e^{-\pi/2}$

---

* Exercícios propostos *

1) Sendo $\begin{cases} z_1 = 2 - 3i \\ z_2 = \sqrt{3} + i \\ z_3 = 4 + 2i \end{cases}$, ache o complexo $z = \frac{(z_1)^4 \cdot (z_2)^5}{(\bar{z}_3)^3}$

Resp.: $z = 60{,}16 . \operatorname{Cis}(4{,}47)$

2) Ache os complexos $z_i = \sqrt[4]{2 + 2\sqrt{3}.i}$

Resp.: $\begin{cases} z_1 = 1{,}41 . \operatorname{Cis}(15°) \\ z_2 = 1{,}41 . \operatorname{Cis}(105°) \\ z_3 = 1{,}41 . \operatorname{Cis}(195°) \\ z_4 = 1{,}41 . \operatorname{Cis}(285°) \end{cases}$
