

* Resolução de Equações - Método de Newton-Raphson *

① O volume de um recipiente em forma de semi-esfera de raio R e que contém um líquido até uma altura h , é dado pela fórmula

$$V = \frac{\pi}{3} \cdot h^2 \cdot (3R - h)$$



Calcule, com 3 casas decimais exatas, o valor de h quando $\begin{cases} R = 5 \text{ m} \\ V = 60 \text{ m}^3 \end{cases}$

Resolução: $60 = \frac{\pi}{3} (h^2) \cdot (3 \cdot 5 - h) \Rightarrow 180 = \pi h^2 \cdot 15 - \pi h^3 \quad (:\pi)$
 $f(h) = h^3 - 15h^2 + 57,296 = 0 \quad (R \leq 5)$

Para acharmos as raízes aproximadas de $f(h)$, vamos tabelar a função (usaremos x no lugar de h)

Como $f(x)$ muda de sinal no intervalo $[2, 3]$, então:

x	$f(x)$
0	+
1	+
2	+
3	-

$a = 2$
 $b = 3$

$$\begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \end{cases} \Rightarrow x_0 = \frac{a+b}{2} = 2,5 \quad \begin{cases} f(x_0) = -20,8290 \\ f'(x_0) = -56,2500 \end{cases}$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 2,5 - \frac{-20,8290}{-56,2500} = 2,1297 \quad \begin{cases} f(x_1) = -1,0788 \\ f'(x_1) = -50,2840 \end{cases}$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 2,1297 - \frac{-1,0788}{-50,2840} = 2,1082 \quad \begin{cases} f(x_2) = -0,0017 \\ f'(x_2) = -49,9119 \end{cases}$$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = 2,1082 - \frac{-0,0017}{-49,9119} = 2,1082$$

Como as 3 primeiras casas de x_2 e x_3 "batem", $\bar{x} = 2,108 \text{ m}$

Com 3 casas exatas, a resposta é $h = 2,108 \text{ m}$.

② O volume de um toróide (bóia de praia) de raio externo R e raio interno r , é dado por: $V = \frac{1}{4} \cdot \pi^2 \cdot (R+r) \cdot (R-r)^2$

Calcule, com 2 casas decimais exatas, o valor de r para $\begin{cases} R = 4 \text{ m} \\ V = 31 \text{ m}^3 \end{cases}$

Resolução: $31 = \frac{1}{4} \cdot \pi^2 (4+r)(4-r)^2$
 $31 = \frac{1}{4} \cdot \pi^2 (4+r)(16-8r+r^2) \Rightarrow r^3 - 4r^2 - 16r + 51,436 = 0 \quad (r \leq 4)$



x	$f(x)$
0	+
1	+
2	+
3	-

$a = 2$
 $b = 3$

$$f(x) = x^3 - 4x^2 - 16x + 51,436 = 0$$

Logo, $\begin{cases} a=2 \\ b=3 \end{cases} \Rightarrow x_0 = 2,5 < \begin{cases} f(x_0) = 2,061 \\ f'(x_0) = -17,250 \end{cases}$ (VI)

$x_1 = 2,5 - \frac{2,061}{-17,250} = 2,619 < \begin{cases} f(x_1) = 0,059 \\ f'(x_1) = -16,375 \end{cases}$

$x_2 = 2,619 - \frac{0,059}{-16,375} = 2,623 < \begin{cases} f(x_2) = 0,006 \\ f'(x_2) = -16,344 \end{cases}$

$x_3 = 2,623 - \frac{0,006}{-16,344} = 2,623$

$\bar{x} = 2,62$ Resp: $\boxed{h = 2,62 \text{ m}}$

3) Em financiamentos pelo Sistema Price, temos a seguinte

equação: $f(x) = K \cdot x^{m+1} - (K+1) \cdot x^m + 1 = 0$, onde $\begin{cases} K = \frac{VF}{PM} \\ m = m^{\circ} \text{ de prestações} \end{cases}$

Use a equação dada, junto com a fórmula do Newton-Raphson, para resolver o seguinte problema: Uma quantidade de R\$ 20000,00 foi financiada com R\$ 2850,00 de entrada, e o saldo em 8

parcelas mensais fixas de R\$ 2526,26 (Sistema Price). Use 5 casas decimais para calcular a taxa mensal de juros do financiamento, supondo que esteja entre 1% e 10%.

$K = \frac{VF}{PM} = \frac{20000,00 - 2850,00}{2526,26} = 6,78869$

Então, $f(x) = 6,78869 \cdot x^9 - 7,78869 \cdot x^8 + 1 = 0$

Temos: $\begin{cases} a=1,03 \\ b=1,04 \end{cases} \Rightarrow x_0 = 1,035 < \begin{cases} f(x_0) = -0,00393 \\ f'(x_0) = 1,17956 \end{cases}$

$x_1 = 1,035 - \frac{-0,00393}{1,17956} = 1,03833$

$\therefore x = x_1 - 1 = 1,03833 - 1 = 0,03833$

Resp: $\boxed{i \approx 3,8\% \text{ a.m.}}$

x	f(x)
1,01	-
1,10	+
1,05	+
1,04	+
1,03	-

Exercício: Um engenheiro comprou uma motocicleta de R\$ 18.000,00 com R\$ 4.000,00 de entrada e o saldo em 5 parcelas mensais fixas de R\$ 3.162,47 (Sistema Price). Calcule a taxa mensal de juros do financiamento. Resolução: $k = \frac{18.000,00 - 4.000,00}{3.162,47} = 4,42692$

$$f(x) = 4,42692 \cdot x^6 - 5,42692x^5 + 1 = 0$$

$$f(x_0) = 0,00207$$

$$f'(x_0) = 0,74197$$

$$x_1 = 1,045 - \frac{0,00207}{0,74197} = 1,04221$$

x	f(x)
1,01	-
1,10	+
1,05	+
1,03	-
1,04	-

$\left. \begin{array}{l} a=1,04 \\ b=1,05 \\ x_0=1,045 \end{array} \right\}$

$i \approx 4,2\% \text{ a.m.}$

OBS: Para comprovarmos que os cálculos são corretos, vamos construir a "planilha" do financiamento

	Saldo devedor
Valor financiado:	14.000,-
1º mês	11.426,53
2º mês	8.742,93
3º mês	5.947,67
4º mês	3.035,00
5º mês	2590

* Exercícios propostos *

1) Um fazendeiro comprou um trator de R\$ 46.825,65 em 12 parcelas mensais fixas de R\$ 4.000,00, pagando a 1ª parcela no ato da compra. Calcule a taxa mensal de juros do financiamento.

Resp: $i \approx 1,8\% \text{ a.m.}$

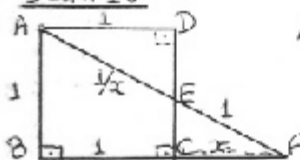
2) Encontre, com erro inferior a 10^{-3} , a raiz de

equação: $f(x) = x^3 + 4x^2 - 7 = 0$ Resp: $\bar{x} \approx 1,164$

3) Idem, para a equação: $f(x) = 4x - 5 \cdot \ln(x) - 3,84 = 0$

Resp: $\bar{x} \approx 1,250$

DESAFIO



Ade o valor de $x = \overline{CF}$

Resp: $f(x) = x^4 + 2x^3 + 2x^2 - 2x - 1 = 0$; $\bar{x} \approx 0,883$

(Exercício adaptado da RPM, nº 16, pág. 67)

