* Interpolação Polinomial *

A Interpolação Polinomial consiste em encontrar o polinômio $P(x_i)$ que "passa" por uma tabela de pontos

x_i	x_0	x_1	x_2	x_3	...	x_n
y_i	y_0	y_1	y_2	y_3	...	y_n

Como a tabela tem $(n+1)$ pontos, então o grau de $P(x_i)$ será $\leq n$

– Polinômio Interpolador de Lagrange (1736-1813)

Para ilustrar o método de Lagrange, vamos usar a tabela

	x_0	x_1	x_2	x_3
x_i	1	2	3	6
y_i	7	12	35	332
	y_0	y_1	y_2	y_3

Como a tabela tem 4 pontos, então o grau de $P(x_i)$ será ≤ 3.

Inicialmente, vamos construir a Matriz de Lagrange (4×4)

$$\begin{array}{c|c} \begin{bmatrix} (x-1) & -1 & -2 & -5 \\ 1 & (x-2) & -1 & -4 \\ 2 & 1 & (x-3) & -3 \\ 5 & 4 & 3 & (x-6) \end{bmatrix} & \begin{array}{c} \text{Denominador} \\ -10 \\ 4 \\ -6 \\ 60 \end{array} \end{array}$$

A fórmula geral da matriz de Lagrange $(n\times n)$ é

$$\begin{bmatrix} (x-x_0) & x_0-x_1 & x_0-x_2 & \cdots & x_0-x_n \\ x_1-x_0 & (x-x_1) & x_1-x_2 & \cdots & x_1-x_n \\ x_2-x_0 & x_2-x_1 & (x-x_2) & \cdots & x_2-x_n \\ \vdots & & & & \vdots \\ x_n-x_0 & x_n-x_1 & x_n-x_2 & \cdots & (x-x_n) \end{bmatrix}$$

Em seguida formamos $P(x_i)$ a partir de 4 frações:

$$P(x_i) = \frac{7(x-2)(x-3)(x-6)}{-10} + \frac{12(x-1)(x-3)(x-6)}{4} + \frac{35(x-1)(x-2)(x-6)}{-6} + \frac{332(x-1)(x-2)(x-3)}{60}$$

$$P(x_i) = \frac{-42(x^3-11x^2+36x-36)+180(x^3-10x^2+27x-18)-350(x^3-9x^2+20x-12)+332(x^3-6x^2+11x-6)}{60}$$

$$\boxed{\text{Resp. } P(x_i) = 2x^3-3x^2+8}$$

OBS: $(x-a)\cdot(x-b)\cdot(x-c) = x^3-(a+b+c)x^2+(a\cdot b+a\cdot c+b\cdot c)x-a\cdot b\cdot c$ | Note bem!

Exercícios - Polinômio de Lagrange

1)

x_i	2	4	5	6
y_i	42	48	15	-58

Resp: $P(x_i) = -2x^3 + 10x^2 - x + 20$

2)

x_i	1	4	5	6
y_i	211	148	95	16

Resp: $P(x_i) = -x^3 + 2x^2 - 10x + 220$

3) Ache a equação horária de cada movimento, de acordo com cada tabela.

a)

t(s)	2	3	5	8
s(m)	11,3	32,4	169,4	794,9

Resp: $s(t) = 2{,}0t^3 - 4{,}0t^2 + 2{,}5t + 6{,}3$ (S.

b)

t(s)	1	2	3	6
s(m)	12,9	18,6	35,9	247,4

Resp: $s(t) = 1{,}5t^3 - 3{,}2t^2 + 4{,}8t + 9{,}8$ (S

Polinômio Interpolador de Newton-Gregory

Para deduzirmos a fórmula de Newton-Gregory vamos definir as Diferenças finitas. Dada uma variável discreta y_i que assume os valores $y_0, y_1, y_2, y_3, \ldots, y_{n-1}, y_n$, temos:

a) Diferenças de 1ª ordem:

$$\Delta y_0 = y_1 - y_0$$
$$\Delta y_1 = y_2 - y_1$$
$$\Delta y_2 = y_3 - y_2$$
$$\vdots$$
$$\Delta y_{n-1} = y_n - y_{n-1}$$

b) Diferenças de 2ª ordem:

$$\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0 = (y_2 - y_1) - (y_1 - y_0) = y_2 - 2y_1 + y_0$$
$$\Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1 = (y_3 - y_2) - (y_2 - y_1) = y_3 - 2y_2 + y_1$$

c) Diferenças de 3ª ordem: XVII

$$\Delta^3 y_0 = \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0 = (y_3 - 2y_2 + y_1) - (y_2 - 2y_1 + y_0)$$
$$= y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0$$

etc.

A fórmula do polinômio de Newton-Gregory é:

$$P(x) = A_0 + A_1(x - x_0) + A_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots + A_n(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1})$$

Como a tabela original é

x_i	x_0	x_1	x_2	$\cdots$	x_{n-1}	x_n
y_i	y_0	y_1	y_2	$\cdots$	y_{n-1}	y_n

(com $x_{i+1} = x_i + h$),

temos: $\boxed{y_0 = A_0}$, ao substituirmos o par (x_0, y_0);

(x_1, y_1): $y_1 = y_0 + A_1(x - x_1) \Rightarrow A_1 = \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \dfrac{\Delta y_0}{h} \Rightarrow \boxed{A_1 = \dfrac{\Delta y_0}{h}}$

(x_2, y_2): $y_2 = A_0 + \dfrac{\Delta y_0}{h}(x_2 - x_0) + A_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)$

$$y_2 = y_0 + \frac{(y_1 - y_0)\cdot 2\cancel{h}}{\cancel{h}} + A_2(2\cdot h)\cdot h \Rightarrow A_2 = \frac{y_2 - y_0 - 2y_1 + 2y_0}{2h^2}$$

$$\boxed{A_2 = \frac{\Delta^2 y_0}{2!\,h^2}}$$

Continuando com os pares $(x_3, y_3), \ldots$ chegaremos à fórmula

$$\boxed{P(x_i) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!\,h^2}(x - x_0)(x - x_1) + \frac{\Delta^3 y_0}{3!\,h^3}(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) + \cdots}$$

Importante! A fórmula de Newton-Gregory acima só pode ser usada se os valores da variável independente (x_i) estiverem em progressão aritmética de razão h, isto é:

$x_1 = x_0 + h$
$x_2 = x_1 + h = x_0 + 2\cdot h$
$x_3 = x_2 + h = x_0 + 3\cdot h$
$\vdots$

Exercício Resolvido: Achar o polinômio que se adapta (XVIII)

à tabela:

x_i	1	3	5	7
y_i	1	69	321	853

$(h = 2)$

Como $(1, 3, 5, 7)$ estão em P.A. de razão $h = 2$, podemos usar a fórmula de Newton-Gregory.

Inicialmente vamos construir a tabela das diferenças finitas para a variável y_i que assume os valores $(1, 69, 321, 853)$

y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$
y_0 1			
69	68 (Δy_0)		
321	252	184 ($\Delta^2 y_0$)	
853	532	280	96 ($\Delta^3 y_0$)

Usando a fórmula de Newton-Gregory, temos:

$$P(x) = 1 + \frac{68}{2}(x-1) + \frac{184}{2!\,2^2}(x-1)\cdot(x-3) + \frac{96}{3!\,2^3}(x-1)(x-3)(x-5)$$

$$P(x) = 1 + 34(x-1) + 23(x^2-4x+3) + 2(x^3-9x^2+23x-15)$$

$$\boxed{P(x) = 2x^3 + 5x^2 - 12x + 6}$$

*Um problema especial — fórmula geral de somatórios

Uma aplicação importante da fórmula de Newton-Gregory é o processo q permite achar a fórmula geral de somatórios.

Exemplo: Achar a fórmula geral do somatório: $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots + n^2$

1º passo: Construir a tabela

n	1	2	3	4
$P(n)$	1	5	14	30

$(h=1)$ $\left(\begin{matrix} x_i \\ y_i \end{matrix}\right)$

2º passo: Construir a tabela das diferenças finitas para $P(n)$ ou y_i

y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$
y_0 1			
5	4 (Δy_0)		
14	9	5 ($\Delta^2 y_0$)	
30	16	7	2 ($\Delta^3 y_0$)

$$P(n) = 1 + 4(n-1) + \frac{5}{2}(n-1)(n-2) + \frac{2}{6}(n-1)(n-2)(n-3)$$

$$P(n) = \frac{6 + 24(n-1) + 15(n^2-3n+2) + 2(n^3-6n^2+11n-6)}{6}$$

$$P(n) = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} = \boxed{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$$

OBS: A fatoração do trinômio $2n^2 + 3n + 1$ é feita por Briott-Ruffini