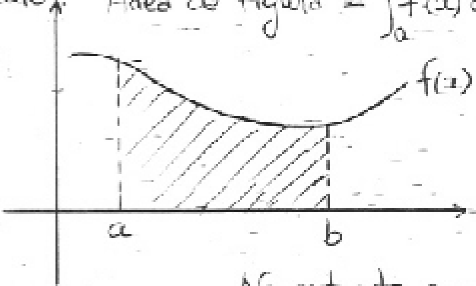
* Integração (ou Quadratura) Numérica *

Nas aulas de CDI, para calcularmos a área limitada por uma curva $f(x)$, o eixo OX e as retas $x = a$ e $x = b$, usamos o Teorema Fundamental do Cálculo: Área da figura $= \int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$, onde



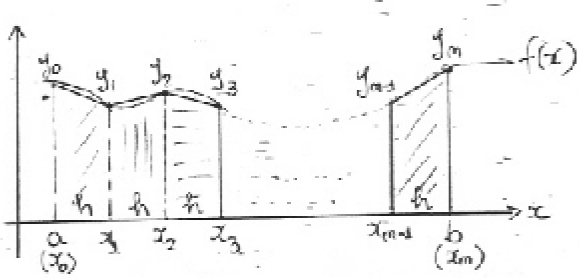
$F(x)$ é a "primitiva" de $f(x)$.

No entanto, em muitos problemas práticos de Engenharia, não temos uma expressão analítica para $f(x)$, apenas dispomos de alguns pares ordenados $(x_i, f(x_i))$; além disso, as funções $f(x)$ que têm primitiva $F(x)$ não são muito comuns; em muitos casos, encontrar $F(x)$ é uma tarefa muito difícil, ou mesmo impossível.

Assim, precisamos desenvolver métodos numéricos que nos permitam calcular qualquer integral definida, por mais complicada que possa parecer.

1º Método: Fórmula dos Trapézios

Um método simples para calcular integrais definidas (áreas), consiste em dividir a figura em trapézios de altura constante, achar a área de cada trapézio e somar essas áreas. O resultado dessa soma dá-nos um valor aproximado para a área da figura; essa aproximação depende do valor de h. Arquimedes, o grande sábio da Antiguidade, usava esse método conhecido como "método da exaustão".



1º Trapézio: $A_1 = \frac{y_1 + y_0}{2} \cdot h$

2º " $A_2 = \frac{y_2 + y_1}{2} \cdot h$

3º " $A_3 = \frac{y_3 + y_2}{2} \cdot h$

⋮

último trapézio $A_n = \frac{y_n + y_{n-1}}{2} \cdot h$

Então, $A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_n = h \cdot \left[\frac{y_1 + y_0}{2} + \frac{y_2 + y_1}{2} + \frac{y_3 + y_2}{2} + \dots + \frac{y_n + y_{n-1}}{2} \right]$ XXII

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx \cong h \cdot \left[\frac{y_0 + y_n}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} y_i \right]}$$ Fórmula dos Trapézios

Importante: $h = \frac{b-a}{n}$ (passo), onde n é o nº de trapézios. Fique ligado pois n não é o nº de pontos; o nº de pontos é $(n+1)$

Exemplo: Calcule, usando 3 casas decimais e $(n = 6)$,

$\int_{0,3}^{0,9} e^{-x} \cdot \sqrt{4 + \cos x}\,dx$; como $\begin{cases} a = 0,3 \\ b = 0,9 \\ n = 6 \end{cases}$, então $h = \frac{b-a}{n} = 0,1$ (passo)

Construímos a tabela

	x	$f(x)$	
x_0	0,3	1,649	(y_0)
x_1	0,4	1,487	(y_1)
x_2	0,5	1,340	(y_2)
x_3	0,6	1,206	(y_3)
x_4	0,7	1,084	(y_4)
x_5	0,8	0,974	(y_5)
x_6	0,9	0,874	(y_6)

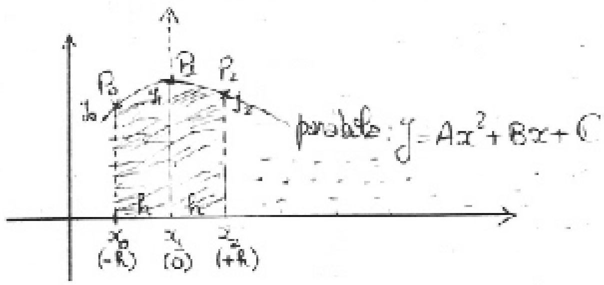
Então $\int_{0,3}^{0,9} e^{-x} \cdot \sqrt{4 + \cos x}\,dx \cong 0,1 \cdot \left[\frac{1,649 + 0,874}{2} + 6,091 \right]$

Resp: $\int_a^b f(x)\,dx \cong 0,735$

Note bem
1) Calculadora em radianos
2) você notou que são 7 pontos? $(n+1)$
3) $x_1 = x_0 + h$, $x_2 = x_1 + h$; $x_3 = x_2 + h$; ..., etc.

2º Método Fórmula de Simpson de 1/3

Por volta de 1743, o matemático inglês Thomas Simpson (1710-1761) descobriu um método para calcular áreas, usando trapézios "curvilíneos", em vez de trapézios planos, como fizera Arquimedes. Na fórmula de (1/3), Simpson usa 3 pontos contíguos, os quais definem uma parábola do 2º grau formando-se, assim, 2 trapézios, em seguida, outros 3 pontos (na sequência), formando-se mais 2 trapézios curvilíneos, conforme mostra a figura, e assim sucessivamente, até o último trio de pontos.



Pelo Teorema Fundamental do Cálculo, temos

$$\text{Área da figura} = \int_{-h}^{+h} (Ax^2 + Bx + C)\,dx = \frac{Ax^3}{3} + \frac{Bx^2}{2} + Cx \Big|_{-h}^{+h} =$$

$$= \frac{Ah^3}{3} + \frac{B\cancel{h^2}}{\cancel{2}} + Ch - \left(-\frac{Ah^3}{3} + \frac{B\cancel{h^2}}{\cancel{2}} - Ch\right) = \frac{h}{3}\left(2Ah^2 + 6\cdot C\right)$$

Como a parábola $y = Ax^2 + Bx + C$, passa pelos 3 pontos $P_0(-h, y_0)$, $P_1(0, y_1)$ e $P_2(+h, y_2)$, substituindo as coordenadas de cada ponto na equação $y = Ax^2 + Bx + C$, temos

$$\begin{array}{rl} & y_0 = +Ah^2 - Bh + C \\ (4)\cdot & y_1 = \qquad (4)\cdot C \\ & y_2 = +Ah^2 + Bh + C \\ \hline & y_0 + 4y_1 + y_2 = 2Ah^2 + 6C \end{array}$$

Teremos, então: Área da figura $= \frac{h}{3}\left(y_0 + 4\cdot y_1 + y_2\right)$. Prosseguindo o raciocínio, agora para os pontos $P_2, P_3, P_4, \ldots$, chegamos à fórmula

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx \cong \frac{h}{3}\left[(y_0 + y_n) + 4\cdot \sum_{(\text{ímpares})} y + 2\cdot \sum_{(\text{pares})} y\right]}$$

Fórmula de Simpson (1/3)

OBS.: 1) A fórmula de Simpson de (1/3) exige que n seja par.

2) Continua valendo $h = \frac{b-a}{n}$ (passo).

3) $\sum_{(\text{ímpares})} y = y_1 + y_3 + y_5 + \cdots + y_{n-1}$

4) $\sum_{(\text{pares})} y = y_2 + y_4 + y_6 + \cdots + y_{n-2}$

5) y_0 e y_n NÃO podem ser computados como $y_{(\text{pares})}$ nem $y_{(\text{ímpares})}$

Exemplo: Calcular, com 3 casas decimais, $\int_{1,5}^{2,5} \ln(x^2+1)\cdot(4-x)\,dx$, por Simpsom, $m = 8$ (XXIV)

Como $h = \frac{b-a}{m} = \frac{2,5-1,5}{8} = 0,125$, temos a tabela:

x	$f(x)$
1,500	2,947 (y_0) *
1,625	3,069 (y_1), ímp
1,750	3,154 (y_2), par
1,875	3,204 (y_3), ímp
2,000	3,219 (y_4), par
2,125	3,202 (y_5), ímp
2,250	3,154 (y_6), par
2,375	3,076 (y_7), ímp
2,500	2,972 (y_m) *

Então, $\int_a^b f(x)\,dx \cong \frac{0,125}{3}\left(5,919 + 50,204 + 13,054\right)$

Resp.: $\int_a^b f(x)\,dx \cong 3,132$

---

* Exercícios *

1) $\int_{2,0}^{2,6} (x^3+1)\,dx$ $\begin{pmatrix} \text{Simpsom} \\ m=6 \\ 3 \text{ casas} \end{pmatrix}$ Resp.: $\int_a^b f(x)\,dx \cong 8,024$

OBS: Calcule, também, $\int_{2,0}^{2,6} (x^3+1)\,dx$, usando o Teorema Fundamental do Cálculo

2) $\int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\frac{1}{2}\cdot \operatorname{sen}^2 x}\,dx$ $\begin{pmatrix} \text{Simpsom} \\ m=10 \end{pmatrix}$ Resp.: $\int_a^b f(x)\,dx \cong 1,350$

3) A tabela mostra a velocidade do móvel em função do tempo. Use a fórmula dos trapézios para calcular o deslocamento do móvel entre $t = 0$ e $t = 10$ segundos

t(s)	0,0	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0	10,0
v(m/s)	10,0	12,5	14,8	16,4	18,6	20,0	18,8	16,5	14,6	18,5	12,9

Resp.: $\Delta s = 162,15$ m

4) $\int_{0,3}^{1,1} \sqrt[3]{5+e^{-x}}\,dx$ $\begin{pmatrix} \text{Simpsom} \\ m=8 \end{pmatrix}$ Resp.: $\int_a^b f(x)\,dx \cong 1,413$