Em Geometria Analítica, o coeficiente angular ( ou declive, ou inclinação ) de uma reta qualquer, calcula-se assim : $m = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ ; a equação dessa reta escreve-se : $y = m.(x - x_0) + y_0$ ; em Cálculo Integral , as retas que nos interessam sã as "retas tangentes ao gráfico de f (x ) no ponto de tangência $P(x_0, y_0)$"; neste caso, o declive da reta tangente representa-se por $f'(x_0)$ ; para calcular o valor numérico de $f'(x_0)$ , achamos $f'(x)$ e substituímos a variável x por $x_0$; por exemplo: se $f(x) = 3x^2 + 6x + 3$ e $x_0 = 5$ , então $f'(5) = 36$.

A equação da reta tangente e`: $x_0$ :é a abscissa do ponto de tangência P

$\boxed{y = f'(x_0).(x - x_0) + y_0}$ IMPORTANTE ! $y_0$ ou $f(x_0)$ é a ordenada do ponto de tangência P.

Nos problemas que envolvem retas tangentes, quando conhecermos o valor de $x_0$, encontrar a equação da reta tangente torna-se uma tarefa fácil ( dizemos que $x_0$ é "o cara")

DERIVADAS ( taxas de variação; inclinações de retas tangentes )

A inclinação ( ou coeficiente angular ) da reta tangente ao gráfico de f(x) representa a taxa de variação instantânea de f(x) em relação a x, para um dado valor de x; assim, por exemplo, temos:

velocidade = $\dfrac{ds}{dt}$ ( taxa de variação da posição em relação ao tempo )

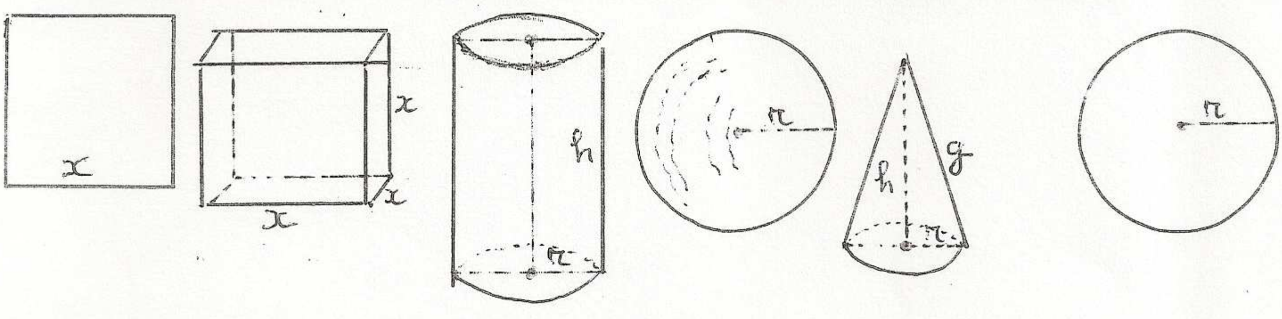
aceleração = $\dfrac{dv}{dt}$ ( taxa de variação da velocidade em relação ao tempo )

$i = \dfrac{dQ}{dt}$ ( intensidade da corrente é a taxa de variação da carga elétrica em relação ao tempo)

$P = \dfrac{d\Gamma}{dt}$ ( Potência é a variação do trabalho em relação ao tempo), etc.

Exercício classe A : mostre que : 1) A taxa de variação da área de um círculo, em relação ao raio, é igual Ao comprimento de sua circunferência. 2) A taxa de variação do volume de um cubo, em relação à medida De sua aresta, é igual à metade de sua área total; 3) A taxa de variação do volume de uma esfera, em relação À medida do raio, é igual à área de sua superfície ; 4) A taxa de variação da área de um quadrado, em relação
À medida de seu lado, é igual à metade de seu perímetro.

Quadrado Cubo Cilindro reto Esfera Cone reto Círculo




| Quadrado | Cubo | Cilindro reto | Esfera | Cone reto | Círculo |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| $A = x^2$ | $V = x^3$ | $V = \pi.r^2.h$ | $V = \dfrac{4}{3}.\pi.r^3$ | $V = \dfrac{1}{3}\pi.r^2.h$ | $A = \pi.r^2$ |
| $C = 4x$ | $A = 6x^2$ | $A_l = 2.\pi.r.h$ | $A = 4.\pi.r^2$ | $A = \pi.r.g$ | $C = 2.\pi.r$ |

Não esqueça : $\boxed{y = f'(x_0).(x - x_0) + y_0}$ ; $x_0$ :é a abscissa do ponto de tangência P

Equação da reta tangente! $y_0$ ou $f(x_0)$ é a ordenada do ponto de tangência P.

$f'(x_0)$ é o coeficiente angular da reta tangente

UNISANTA
UNIVERSIDADE SANTA CECILIA

**Disciplina:** Cálculo 1 – prof. Joaquim . – folha 6

**Nome:**______________________________________ **Nº**________

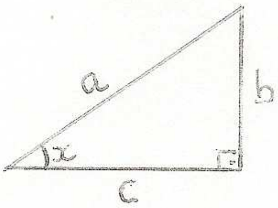
# FÓRMULAS E "DICAS" ÚTEIS

## 1. Potências e radicais

$a^m . a^n = a^{m+n}$ ; $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ ; $(a^m)^n = a^{m.n}$ ; $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$ ; $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-m} = \left(\dfrac{b}{a}\right)^n$

$(a.b)^n = a^n . b^n$ ; $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$ ; se liga nessa : $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\dfrac{dx}{dy}}$ (IMPORTANTE)

## 2. Trigonometria




$\text{sen}x = \dfrac{b}{a}$ $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$ ; "quente" : $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$

$\cos x = \dfrac{c}{a}$ $\text{sen}x = \pm\sqrt{1-\cos^2 x}$ ; $\cos x = \pm\sqrt{1-\text{sen}^2 x}$

$\text{tg}x = \dfrac{b}{c}$ $\text{tg}^2 x + 1 = \sec^2 x$ ; $\text{sen}2x = 2.\text{sen}x.\cos x$

$\cos 2x = \cos^2 x - \text{sen}^2 x$

Funções circulares inversas

Se x = seny , então y = arcsenx ( arco cujo seno vale x)
Se x = cosy , então y = arccosx ( arco cujo cosseno vale x)
Se x = tgy , então y = arctgx ( arco cuja tangente vale x)

## 3. Exponenciais e logaritmos

Se $x = e^y$ (função exponencial) , então y = Lnx ( função logaritmo natural)

Propriedades dos logaritmos :

$\text{Ln}(a.b) = \text{Ln}a + \text{Ln}b$ ; $\text{Ln}\left(\dfrac{a}{b}\right) = \text{Ln}a - \text{Ln}b$ ; $\text{Ln}a^b = b.\text{Ln}a$ (lei do "tombo")

## 4. Equação da reta tangente:

$y = f'(x_0).(x - x_0) + y_0$ , onde : x e y são as variáveis;

$x_0$ é a abscissa do ponto de tangência ; $y_0$ é a ordenada do ponto de tangência.

$f'(x_0)$ é o declive ( ou coeficiente angular da reta ) e mede a "taxa de variação instantânea".

## 5. Regras de derivação :

$(u.v)' = u'.v + v'.u$ ( produto ) ; $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'.v - v'.u}{v^2}$ (quociente ).

LEMBRETES : $\frac{1}{2}-1=-\frac{1}{2}$ ; $-\frac{1}{2}-1=-\frac{3}{2}$ ; $\frac{1}{3}-1=-\frac{2}{3}$ ; $-\frac{1}{3}-1=-\frac{4}{3}$ ; $\frac{3}{2}-1=\frac{1}{2}$ ; $-\frac{3}{2}-1=-\frac{5}{2}$

Exercício : Use a tabela de derivadas e as regras de derivação para achar a derivada de cada função :

1) y ou f(x) = $\sqrt{x}$ .senx 2) y ou f(x) = $\frac{e^x}{x^2}$ 3) y ou f(x) = $\sqrt[3]{x^2}$ .tgx 4) y ou f(x) = $\frac{tgx}{\sqrt{x}}$

Resp: 1) f´(x) ou $\frac{dy}{dx}=\frac{senx}{2\sqrt{x}}+\sqrt{x}$ .cosx 2)f´(x) ou $\frac{dy}{dx}=\frac{e^x.(x^2-2x)}{x^4}$ 3)f´(x) ou $\frac{dy}{dx}=\frac{2tgx}{3\sqrt[3]{x^4}}+\frac{\sqrt[3]{x^2}}{\cos^2 x}$

4) f´(x) ou $\frac{dy}{dx}=\frac{2x.\sec^2 x-tgx}{2\sqrt{x^3}}$ ( OBS : $\sec^2$ x é o mesmo que $\frac{1}{\cos^2 x}$ ; x.$\sqrt{x}$ é o mesmo que $\sqrt{x^3}$ ).

## DERIVADA DA FUNÇÃO INVERSA

Para podermos acrescentar novas fórmulas à nossa tabela de derivadas, vamos mostrar como, dada uma função y = f(x), cuja derivada nós conhecemos, podemos encontrar a derivada de sua função inversa x = $f^{-1}$(y) . IMPORTANTE : $\frac{dy}{dx}$ é o mesmo que $\frac{1}{\frac{dx}{dy}}$ , não esqueça.

EXEMPLO : Encontre a derivada de y = Lnx ( logaritmo natural ). Temos : y = Lnx , então x = $e^y$ pois a função exponencial e a função logaritmo natural são inversas

Se x= $e^y$ então $\frac{dx}{dy}=e^y$ ( veja atabela). Assim , $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{e^y}=\frac{1}{x}$, já que $e^y$=x (lnx)´= $\frac{1}{x}$

EXEMPLO : Encontre a derivada de y = arcsenx ( lê-se"arco cujo seno vale x")

Se y=arcsenx , x = seny ( funções inversas ) e $\frac{dx}{dy}$= cosy .Assim, $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{\cos y}$

Como $sen^2$ y + $\cos^2$ = 1 , então cosy = $\sqrt{1-sen^2 y}$ ; $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, pois $sen^2$ y = $x^2$

EXERCÍCIO : Siga o modelo do exemplo anterior para mostrar que : 1) (arccosx)´ = - $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

2) (arctgx)´= $\frac{1}{1+x^2}$ ( Lembrete : $tg^2$ y + 1 = $\sec^2$ y)

UNISANTA
UNIVERSIDADE SANTA CECÍLIA

**Disciplina:** Cálculo 1 – prof. Joaquim . – folha 8

**Nome:**______________________________ **Nº**_______

## RETAS TANGENTES

Uma das aplicações mais importantes do Cálculo Diferencial é encontrar a equação da reta tangente ao gráfico de f(x) no ponto de tangência $P(x_0, y_0)$ : $y = f'(x_0).(x - x_0) + y_0$ , onde :
$f'(x_0)$ é o coeficiente angular da reta tangente, x e y são as variáveis, $x_0$ ("o cara") é a abscissa do ponto de tangência e $y_0$ é a ordenada do ponto de tangência.

## EXERCÍCIOS ( Retas tangentes )

Encontre a equação da reta tangente à curva nos seguintes casos: 1) $f(x) = x^2 - 8x + 9$ , e a abscissa do ponto de tangência vale 3. Resp. $y = -2.x$

2) $f(x) = 2x^3 + 5x - 8$ e $x_0 = -3$ ; Resp. $y = 59x + 96$

3) $f(x) = -3x^2 + 14x - 1$ , e é perpendicular à reta de equação: $2x + 4y + 3 = 0$ ; Resp. $y = 2x + 11$

4) $f(x) = x^2 + 3x$ e é paralela à reta de equação : $x - 2y + 3 = 0$ ; Resp. $y = 2x + \frac{1}{4}$

Exercício "CRUEL" : Encontre as equações das retas tangentes ao gráfico de $f(x) = 3x - 2x^2$ , e que passam pelo ponto F(2,0) , fora da curva. Resp. (i) $y = -x + 2$ ; (ii) $y = -9x + 18$

## TAXAS DE VARIAÇÃO RELACIONADAS

Em muitos problemas de Engenharia, Física , Matemática e Economia, temos uma função ( em geral na variável independente x), e precisamos derivar essa função em relação a outra variável ( em geral t); nesses casos, a derivação é feita seguindo-se as tabelas e as regras de derivação, com uma 'NOVIDADE": No lado esquerdo da igualdade aparece $\frac{dy}{dt}$ e do lado direito, aparece $\frac{dx}{dt}$ ( supondo-se que a nova variável seja t) . EXEMPLO : a derivada de $y = 2x^3$ em relação a t é $\frac{d(y)}{dt} = \frac{d(2x^3)}{dt}$, isto é : $\frac{dy}{dt} = 6x.\frac{dx}{dt}$

Exercício: Encontre $\frac{dV}{dt}$ , onde $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ ; Resp. $\frac{dV}{dt} = 4\pi r^2 . \frac{dr}{dt}$

Exercício : Encontre $\frac{dV}{dt}$ , sendo $V = x^3$ ; Resp. $\frac{dV}{dt} = 3x^2 . \frac{dx}{dt}$

Exercício: Encontre $\frac{dV}{dt}$ , sendo $V = 4\pi h$ ; Resp. $\frac{dV}{dt} = 4\pi . \frac{dh}{dt}$

UNISANTA
UNIVERSIDADE SANTA CECILIA

**Disciplina:** Cálculo 1 – prof. Joaquim . – folha 9

**Nome:**__________________________________ **Nº**_______

## DERIVADA COMO TAXA DE VARIAÇÃO - EXERCÍCIOS

1. Uma epidemia de gripe H1N1 atingiu uma região; técnicos do Ministério da Saúde estimam que o número de pessoas infectadas pelo vírus t dias após o início da epidemia é $P(t) = 60t^2 - t^3$. Qual a taxa de variação do nº de pessoas infectadas, em relação ao tempo, depois de 3º dias?

Resp $\frac{dP}{dt} = 900$ pessoas/dia

2. Uma análise de produção diária de uma linha de montagem mostra que cerca de $P = 60t + t^2 - \frac{1}{12}t^3$ unidades são produzidas após t horas de trabalho ( $0 \leqslant t \leqslant 8$). Qual a taxa de variação da produção ( em unidades por hora), quando t = 4 horas? Pesp. $\frac{dP}{dt} = 63$ unidades/hora

3. Uma torneira com defeito está gotejando água; após t horas, restam $f(t) = 5t - \sqrt{t}$ litros no recipiente.

Qual a taxa de variação da água ( em litros por hora), depois de 4 horas? Resp. $\frac{df}{dt} = 4{,}7$ lirros/hora

4. Após uma campanha publicitária, as vendas de um produto inicialmente crescem e depois decrescem. Suponha que t dias após o fim da campanha as vendas sejam $V(t) = -3t^2 + 30t + 100$ unidades Qual a taxa de variação do nº de unidades em relação ao tempo, quando t = 2 ? Resp. $\frac{df}{dt} = 4{,}7$ (unidades/dia)

5. Suponha que o custo total de produção de x unidades de um certo produto seja $C(x) = 3x^2 + 5x + 10$ (R$) . Qual o custo marginal de 5º unidades produzidas ? OBS : Os economistas chamam <u>CUSTO MARGINAL</u> a taxa de variação do custo total em relação ao nº de unidades produzidas.

Resp. $\frac{dC}{dt}$ ou $C'(50) = 305$ (R$ / unidade)

## TAXAS DE VARIAÇÃO REALACIONADAS - EXERCÍCIOS

1. Um balão esférico flexível é inflado com hélio a uma taxa de $100\pi$ $m^3$/min; a que taxa o raio estará variando quando seu valor for 5 metros? E a superfície? OBS : $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ ; $S = 4\pi r^2$

Resp. $\frac{dr}{dt} = 1$ m/min. ; $\frac{dS}{dt} = 40\pi\, m^2$/min.

2. Um líquido está saindo por um furo feito no fundo de um tanque cilíndrico de 2 metros de raio a uma taxa de 0,6 $m^3$/min; A que taxa, em relação ao tempo, a altura ("profundidade" do líquido diminui?

Resp. $\frac{dh}{dt} = -0{,}05$ m/min.