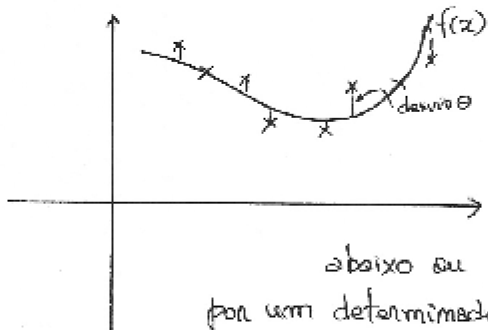
* AJUSTE DE CURVAS *

(XXVI)

Em muitos problemas práticos, temos uma tabela de $\underline{m}$ pares ordenados (x_i, y_i), $i = 1, 2, 3, \cdots, m$, e estamos interessados em encontrar a curva de equação $f(x_i)$ que "melhor se ajusta" a essa tabela.

Em geral, $f(x_i) \neq y_i$, isto é, o valor fornecido pela curva (calculado) é diferente do valor fornecido pela tabela (medido); essa diferença vai ser chamada de desvio.

$$\boxed{d_i = f(x_i) - y_i} \quad (i = 1, 2, 3, \ldots, m)$$



De acordo com a definição, os desvios podem ser negativos ou positivos, conforme a curva esteja abaixo ou acima do ponto; se a curva passar por um determinado ponto, o desvio, nesse ponto, será nulo.

Para que uma curva $f(x_i)$ forneça um "bom ajuste" para a tabela, os desvios devem ser mínimos. Da Teoria do Cálculo, para que uma função tenha mínimo, o "candidato" a mínimo será a raiz da função derivada. A nossa tarefa consiste, então, em definir uma função (dependente dos desvios), derivar essa função e achar a raiz da derivada.

A função mais "simples" é $S = \sum d_i$; essa função, embora simples, não é "confiável", pois os desvios, conforme foi explicado, podem ser positivos ou negativos.

Já a função $S = \sum |d_i|$ é confiável, mas não é derivável em todos os pontos. A função com a qual nós vamos trabalhar é a função $S = \sum (d_i)^2$, que é, ao mesmo tempo, confiável e derivável. O método associado a essa função chama-se:

MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS (M.M.Q.)

OBSERVAÇÕES: 1) Na tabela, só são dados os valores das colunas de x_i e y_i; as outras 2 colunas foram acrescentadas (XXVIII)

2) Você pode resolver o sistema linear na HP, usando o "Solve", "solve lin sys..."

3) Para ter uma idéia a respeito do ajuste, você pode calcular os desvios $d_i = f(x_i) - y_i$, $i = 1, 2, 3, \dots, 8$.

Exercício: A tabela mostra as alturas (em cm) e os pesos (em Kg) de uma amostra de 12 estudantes do sexo masculino do 1º Colegial de uma escola. Ache a reta dos M.Q. "altura x peso" (resp/ c/ 3 casas)

(x_i): peso (Kg)	70	63	72	60	66	70	74	65	62	67	65	68
(y_i): altura (cm)	155	150	180	135	156	168	178	160	132	145	139	152

Resp: $f(x_i) = -60,7 + 3,22 \cdot x_i$

2º Caso: Curva exponencial dos M.Q. $\boxed{f(x_i) = a \cdot e^{bx_i}}$

$$\ln[f(x_i)] = \ln[a \cdot e^{bx_i}]$$

$$\ln[f(x_i)] = \ln a + bx_i \text{, fazendo } \begin{cases} \ln[f(x_i)] = Y_i \\ \ln a = A \end{cases} \text{, temos}$$

$$\boxed{Y_i = A + bx_i}$$ Equação de uma "reta".

Aplicando as propriedades dos logaritmos, conseguimos "retificar" a curva exponencial; na prática essa "retificação" é feita substituindo-se o papel milimetrado dos pares (x_i, y_i) pelo papel mono-log $(x_i, \ln y_i)$

Exemplo: Um estudante mediu a carga de um capacitor em diferentes instantes, obtendo os resultados da tabela:

a) Encontre, com 3 casas decimais, a curva exponencial dos M.Q. "carga x tempo"

b) Encontre a carga estimada para $t = 4$ minutos

c) Use logaritmos para determinar o instante em que a carga vale $4017,107\ \mu C$.

t(min) (x_i)	Q(μC) (y_i)	$\ln y_i$	x_i^2	$x_i \cdot (\ln y_i)$
2,0	298,365	5,698	4,000	11,397
3,5	402,751	5,998	12,250	20,994
4,5	491,921	6,198	20,250	27,892
5,5	600,833	6,398	30,250	35,191
7,0	811,040	6,698	49,000	46,888
8,0	990,606	6,898	64,000	55,187
9,0	1209,929	7,098	81,000	63,885
10,0	1477,811	7,298	100,000	72,983
11,5	1994,836	7,598	132,250	87,381
12,5	2436,499	7,798	156,250	97,479
14,0	3288,929	8,098	196,000	113,376
Σ= 87,500		75,778	845,250	632,653

(X × 12)

$$\begin{cases} m \cdot A + b \cdot \sum x_i = \sum \ln y_i \\ A \cdot \sum x_i + b \cdot \sum x_i^2 = \sum x_i \cdot (\ln y_i) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 11A + 87{,}500b = 75{,}778 \\ 87{,}500A + 845{,}250b = 632{,}65 \end{cases}$$

$A = 5{,}297$

$b = 0{,}200$

$a = e^A = 199{,}737$

a) $f(x_i) = a \cdot e^{bx_i}$, isto é, $\boxed{Q(t) = 199{,}737 \cdot e^{0{,}200\,t}}$

b) $Q(4) = 199{,}737 \cdot e^{0{,}200 \cdot 4} \Rightarrow Q \cong 444{,}522\ \mu C$

c) $4017{,}107 = 199{,}737 \cdot e^{0{,}200 \cdot t} \Rightarrow \ln(20{,}112) = \ln\left(e^{0{,}200 \cdot t}\right)$

$3{,}001 = 0{,}200 \cdot t$

$t \cong 15$ min

Observações: para encontrar os valores de $\underline{a}$ e $\underline{b}$ da equação $f(x_i) = a \cdot e^{bx_i}$, siga o seguinte roteiro:

1) Construa as colunas $Y_i = \ln(y_i)$, x_i^2 e $x_i \cdot (\ln y_i)$ e as respectivas somas

2) Resolva o sistema linear $\begin{cases} m \cdot A + b \cdot \sum x_i = \sum (\ln y_i) \\ A \cdot \sum x_i + b \cdot \sum x_i^2 = \sum x_i \cdot (\ln y_i) \end{cases}$

3) faça e^A, pois, por definição, $\ln a = A$, encontrando, assim, o valor de $\underline{a}$.

Exercício: A tabela mostra o n.º de habitantes (em milhares), de uma cidade entre os anos de 1999 – 2005. Ache a curva exponencial dos M.Q. "Hab x tempo"

1999(1)	2000(2)	2001(3)	2002(4)	2003(5)	2004(6)	2005(7)	ANOS
353,416	356,255	359,116	362,000	364,908	367,839	370,794	HAB(MILHA

Resp: $N(t) = 351,075 \cdot e^{0{,}008\,t}$

3.º Caso: Curva geométrica dos M.Q $\boxed{f(x_i) = a \cdot x_i^{b}}$

$$\ln[f(x_i)] = \ln(a \cdot x_i^{b}) \Rightarrow \ln[f(x_i)] = \ln a + b \cdot \ln x_i$$

Fazendo $\begin{cases} \ln[f(x_i)] = Y_i \\ \ln a = A \\ \ln x_i = X_i \end{cases}$, temos: $Y_i = A + b \cdot X_i$ "Reta"

Resolvendo o Sistema Linear (papel log-log) $\begin{cases} m \cdot A + b \cdot \Sigma(\ln x_i) = \Sigma(\ln y_i) \\ A \cdot \Sigma(\ln x_i) + b \cdot \Sigma(\ln x_i)^2 = \Sigma(\ln x_i) \cdot (\ln y_i) \end{cases}$,

achemos os valores de A e b; finalmente, $a = e^{A}$

Exemplo: Use os dados da tabela para:

a) Encontrar, com 3 casas decimais, a curva geométrica dos M.Q. "$y_i \times x_i$"

b) O valor de y_i para $x_i = 5$

c) O valor de x_i para $y_i = 15{,}577$

x_i	y_i	$(\ln x_i)$	$(\ln y_i)$	$(\ln x_i)^2$	$(\ln x_i) \cdot (\ln y_i)$
2,38	11,894	0,867	2,476	0,752	2,147
3,25	12,658	1,179	2,538	1,389	2,993
4,08	13,247	1,406	2,584	1,977	3,633
5,85	14,237	1,766	2,656	3,120	4,690
6,33	14,464	1,845	2,672	3,405	4,929
8,12	15,202	2,094	2,721	4,386	5,699
9,50	15,687	2,251	2,753	5,068	6,197
10,40	15,974	2,342	2,771	5,484	6,490
//////	//////	13,750	21,171	25,581	36,778

$$\begin{cases} 8A + 13{,}750b = 21{,}171 \\ 13{,}750A + 25{,}581b = 36{,}778 \end{cases}$$

$b = 0{,}200$

$A = 2{,}302$

$a = e^{A} = 9{,}994$

a) $f(x_i) = 9{,}994 \cdot x_i^{0{,}200}$

b) $f(5) = 9{,}994 \cdot 5^{0{,}200} \cong 13{,}789$

c) $15{,}577 = 9{,}994 \cdot x_i^{0{,}200} \Rightarrow (1{,}559)^{1/0{,}200} = \left(x^{0{,}200}\right)^{1/0{,}200}$

$x_i = 9{,}200$