

**Tabela 1.5** – Valores dos coeficientes elásticos de alguns metais, Moura Branco (1994).

Material	Módulo de elasticidade, E (MPa)	Módulo transversal, G (MPa)	Coeficiente de Poisson, ν
Alumínio e ligas de alumínio	$6,93 \times 10^4 - 7,98 \times 10^4$	$2,59 \times 10^4 - 2,7 \times 10^4$	0,32 – 0,34
Latão	$1,02 \times 10^5 - 1,11 \times 10^5$	$3,71 \times 10^4 - 4,2 \times 10^4$	0,33 – 0,36
Cobre	$1,19 \times 10^5 - 1,26 \times 10^5$	$4,06 \times 10^4 - 4,69 \times 10^4$	0,33 – 0,36
Ferro fundido	$9,1 \times 10^4 - 1,47 \times 10^5$	$3,64 \times 10^4 - 5,74 \times 10^4$	0,21 – 0,30
Aço ao carbono e de baixa liga	$1,96 \times 10^5 - 2,24 \times 10^5$	$7,59 \times 10^4 - 8,21 \times 10^4$	0,26 – 0,29
Aço inox (18–8)	$1,96 \times 10^5 - 2,07 \times 10^5$	$7,31 \times 10^4$	0,30
Titânio	$1,06 \times 10^5 - 1,15 \times 10^5$	$4,14 \times 10^4$	0,31 – 0,34
Tungstênio	$4,0 \times 10^5$	$1,57 \times 10^5$	0,27
Vidro	$4,97 \times 10^4 - 7,94 \times 10^5$	$2,62 \times 10^4 - 3,24 \times 10^4$	0,21 – 0,27
PMMA	$2,41 \times 10^3 - 3,45 \times 10^3$	$1,04 \times 10^3$	0,35
Polietileno	$1,38 \times 10^2 - 3,8 \times 10^2$	$1,17 \times 10^2$	0,45
Borracha	0,76 – 4,14	0,345 – 1,38	0,50

1.6.1 – Deformação volumétrica

A variação de volume de um material pode ser definida como sendo:

$$\Delta V/V_0 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \text{ ou } \Delta V/V_0 = e_1 + e_2 + e_3 \text{ (para peq. deformações)} \quad (1.16)$$

É possível provar que as deformações de cisalhamento produziram uma alteração de volume de segunda ordem em relação às deformações normais, sendo portanto o seu efeito desprezível.

Graças ao valor do coeficiente de Poisson para os metais no regime elástico ($\nu < 0,5$), a deformação elástica causa variação de volume (pequena) no material. A variação de volume no regime plástico é nula, conforme será descrito no item 9.

1.7 – Ensaio de Tração

Não existe ensaio mecânico que preveja completamente o real desempenho mecânico de um material, seja na etapa de produção (conformação, usinagem, etc.), seja na etapa de utilização (como elemento estrutural, peça automobilística, painel, etc.).

No entanto, o ensaio de tração é considerado o teste mecânico que apresenta a melhor relação entre informações obtidas e custo/complexidade de ensaio. Apesar deste teste possa ser realizado em condições bem distintas daquelas nas quais o material será requisitado, os parâmetros obtidos deste ensaio são o ponto de partida para a caracterização e especificação. Isto pode ser visto, esquematicamente, pelo gráfico contido na figura 1.13.

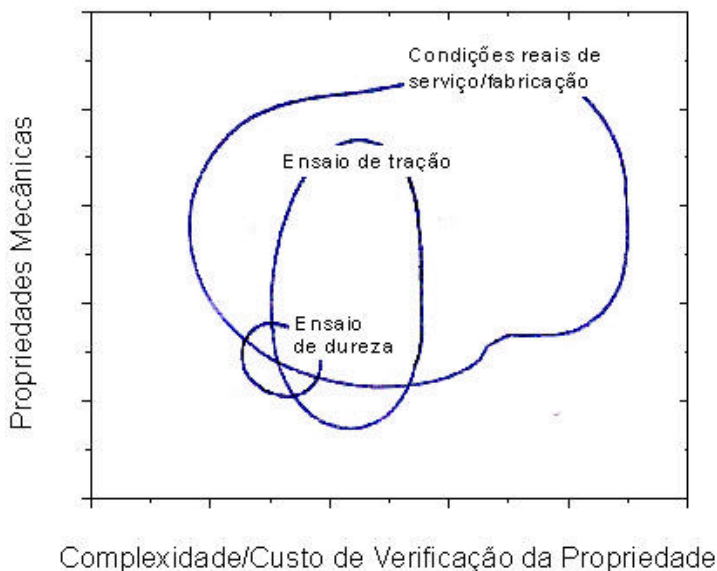


Figura 1.13 – Representação esquemática da relação entre a descrição das propriedades mecânicas de um componente sob condições reais de serviço/fabricação e pelo ensaio de tração em relação ao custo/complexidade.

O ensaio de tração consiste, basicamente, em se tracionar um corpo de prova (CP) de seção reta retangular (CP prismático) ou circular (CP cilíndrico) até a sua ruptura. Diversos parâmetros podem ser medidos. Aqui interessa fazer uma descrição dos parâmetros utilizados na teoria da conformação plástica dos metais e algumas características destes parâmetros. O Anexo I contém uma série de informações a respeito do ensaio de tração e parâmetros mensurados.

1.7.1 – Parâmetros elásticos e de escoamento

São parâmetros de limitada utilidade para o estudo da conformação plástica, mas que permitem o cálculo e o dimensionamento das cargas necessárias para provocar a deformação plástica dos materiais. Em geral, nestes casos, pode-se considerar que as deformações reais e de engenharia são praticamente iguais ($e \approx \epsilon$ quando $\epsilon \rightarrow 0$), pois os valores de deformação envolvidos são muito pequenos (da ordem de 0,2%).

1.7.1.1 – Módulo de elasticidade (E): fornece uma indicação da rigidez do material, sendo inversamente proporcional à temperatura e pouco dependente de pequenas variações na composição química de elementos cristalinos (como por exemplo nos aços). Segundo a expressão simplificada da lei de Hooke (equação 1.13), o módulo de elasticidade pode ser expresso como sendo:

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon} \quad (1.15)$$

Onde σ é a tensão na qual se obtém a deformação real ϵ . Esta deformação deve ser medida por meio de extensômetros para se evitar que a deformação do sistema de testes altere os valores do módulo de elasticidade medidos.



1.7.1.2 – Módulo de elasticidade transversal (G): corresponde à rigidez do material quando submetido a um carregamento de cisalhamento, calculado por uma expressão semelhante à expressão (1.15):

$$G = \frac{\tau}{\gamma} \quad (1.16)$$

Onde τ e γ são as tensão e a respectiva deformação cisalhante que sofre o CP.

1.7.1.3 – Coeficiente de Poisson (n): o coeficiente de Poisson mede a rigidez do material na direção perpendicular àquela em que a carga está sendo aplicada, conforme ilustra a figura 1.14. O valor deste coeficiente é determinado pela relação entre as deformações na direção de aplicação de carga (ϵ_1) e a deformação medida na direção perpendicular (ϵ_2 ou ϵ_3) – equação 1.17.

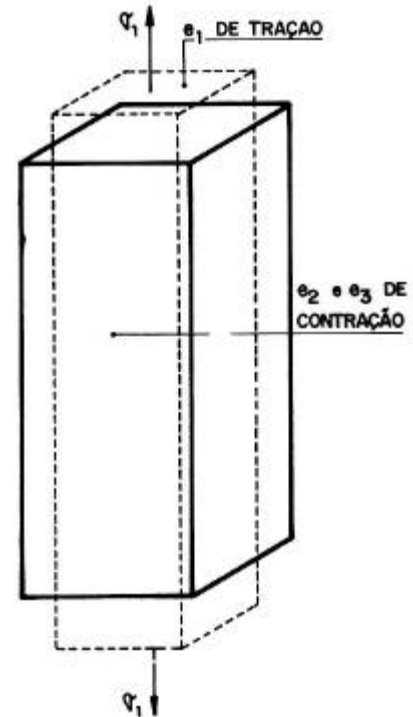


Figura 1.14 – Deformações de engenharia (ou convencionais) experimentadas por uma barra prismática submetida a um carregamento unidirecional (como em um ensaio de tração), Helman e Cetlin (19).

$$n = -\frac{e_2}{e_1} = -\frac{e_3}{e_1} \quad (1.17)$$

1.7.1.4 – Limite de escoamento (s_{ys} ou LE): pode-se afirmar que é o principal parâmetro obtido do ensaio de tração, prestando-se para cálculos de projeto estrutural (onde é necessário que o material não entre em deformação plástica) quanto para conformação plástica (quando é desejado facilidade de deformação plástica do material). Normalmente quando um material tem suas propriedades mecânicas fixas por uma norma de qualidade, a variável mais utilizada é o limite de escoamento.

Em um ensaio de tração, existem dois tipos de comportamento no que diz respeito à determinação do limite de escoamento, conforme mostrado na figura I.1 (do anexo I): materiais que apresentam um ponto descontínuo na curva tensão vs. deformação e materiais que apresentam escoamento contínuo (mudam do comportamento elástico para o plástico continuamente).

No segundo caso, quando é mais difícil determinar o exato limite de escoamento, as normas de execução dos ensaios sugerem defini-lo como sendo a tensão para uma deformação entre $e=0,2\%$ a até $e=0,5\%$ para materiais excessivamente dúcteis. Em ambos os casos, a deformação elástica do CP é praticamente desprezível e a área real do material é



aproximadamente igual à sua área inicial ($A_{ys} \approx A_0$), o que leva à definição de limite de escoamento como sendo igual ao expresso pela equação 1.18.

$$s_{ys}(=LE) = \frac{F_{ys}}{A_{ys}} \cong \frac{F_{ys}}{A_0} \quad (1.18)$$

onde F_{ys} é a força exercida pelo sistema de testes sobre o CP de área inicial A_0 .

1.7.2 – Parâmetros plásticos

Os parâmetros plásticos, medidos em um ensaio de tração, permitem avaliar seu desempenho sob conformação plástica. No caso da utilização destes parâmetros para avaliar a conformabilidade do material, deve-se levar em consideração as condições de carregamento e modo de deformação específicos do ensaio de tração.

1.7.2.1 – Tensão e deformação verdadeiros (s e e): A partir do escoamento o coeficiente de Poisson aumenta até se estabilizar em 0,5, conforme mostrado na figura 1.15.

Na prática isto equivale a dizer que o CP se expande na direção na qual a força é aplicada na mesma velocidade em que contrai nas demais direções. Desta forma, o volume total (vide equação 1.16) se mantém constante, assim como o somatório das deformações torna-se nulo ($\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 = 0$).

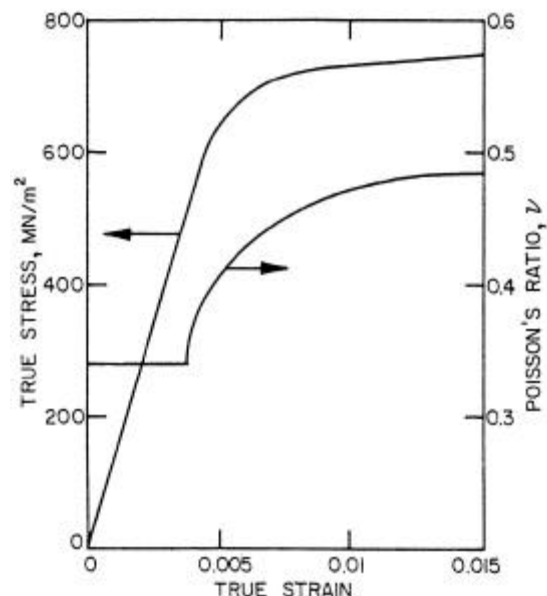


Figura 1.15 – Representação esquemática da mudança no coeficiente de Poisson à medida que o regime de deformação muda de elástica para plástico, Meyers & Chawla, 1984

Neste momento a área da seção reta do CP diminui intensamente e torna-se necessário fazer as seguintes correções para se determinar a exata tensão atuante sobre o CP e conseqüentemente o real comportamento plástico do material:

$$s_i = \frac{F_i}{A_i} = \frac{F_i}{A_i} \cdot \frac{A_0}{A_0} = \frac{F_i}{A_0} \cdot \frac{A_0}{A_i} = S_i \cdot \frac{A_0}{A_i} \quad (1.19)$$

onde F_i é a força atual sobre o CP de tração que apresenta uma área instantânea A_i , menor do que a área inicial A_0 . Porém da definição de deformação convencional, dada pela equação 1.8:

$$e = \Delta L / L_0 = (L_i - L_0) / L_0 = (L_i / L_0) - 1 \quad (1.20)$$

$$(L_i / L_0) = 1 + e$$

admitindo-se distribuição homogênea de deformações e $\nu \approx 0,5$, ou seja, constância de volume,

$$L_0 \cdot A_0 = L_1 \cdot A_1 = L_i \cdot A_i \quad (1.21)$$

$$(L_i/L_0) = (A_0/A_i)$$

Combinando (1.21) com (1.20) e depois com (1.19), obtêm-se:

$$e = (L_i/L_0) - 1 = (A_0/A_i) - 1$$

$$(A_0/A_i) = 1 + e$$

$$\sigma = S(1+e) \text{ ou } \sigma_{\text{Real}} = \sigma_{\text{Convencional}} (1+e) \quad (1.22)$$

Da mesma maneira, pode ser descrita a relação entre a deformação real e convencional (ou de engenharia) a partir da equação (1.12):

$$e = \ln \frac{L_i}{L_0} = \ln(1+e) \quad (1.23)$$

O aluno deve notar que as duas equações para transformar tensão e deformação de engenharia (S e e), baseadas nas dimensões iniciais do CP (L_0 e A_0), para as respectivas tensões e deformações verdadeiras (σ e ϵ) somente são válidas quando têm-se distribuição homogênea de deformações e constância de volume.

Uma curva tensão-deformação verdadeira pode ser construída ponto a ponto a partir das equações (1.22) e (1.23) até a estricção, a partir deste ponto a determinação da tensão e deformação verdadeiras deve ser feita experimentalmente. A figura 1.16 mostra a comparação entre curvas tensão-deformação real e convencional de um aço AISI 4140, laminado a quente.

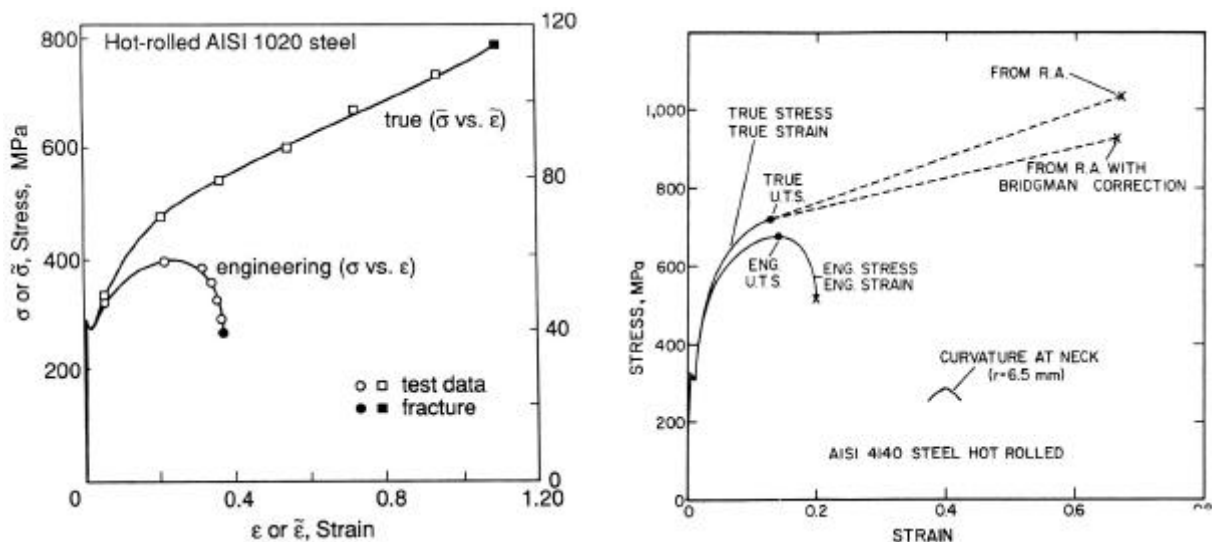


Figura 1.16 – Curvas tensão-deformação convencional (de engenharia) e real para um aço AISI 1020, Dowling (1993) e AISI 4140, Boyer (1990).

As figuras a seguir mostram a aparência das curvas tensão-deformação de um aço baixo carbono como obtidas diretamente de um ensaio de tração (figura 1.17), na região onde ocorre o escoamento do material (figura 1.18) e a respectiva curva real (figura 1.19).

Equações para descrever a curva tensão-deformação real têm sido propostas por vários autores, sendo, no entanto apenas equações empíricas, apenas para ajuste dos dados obtidos

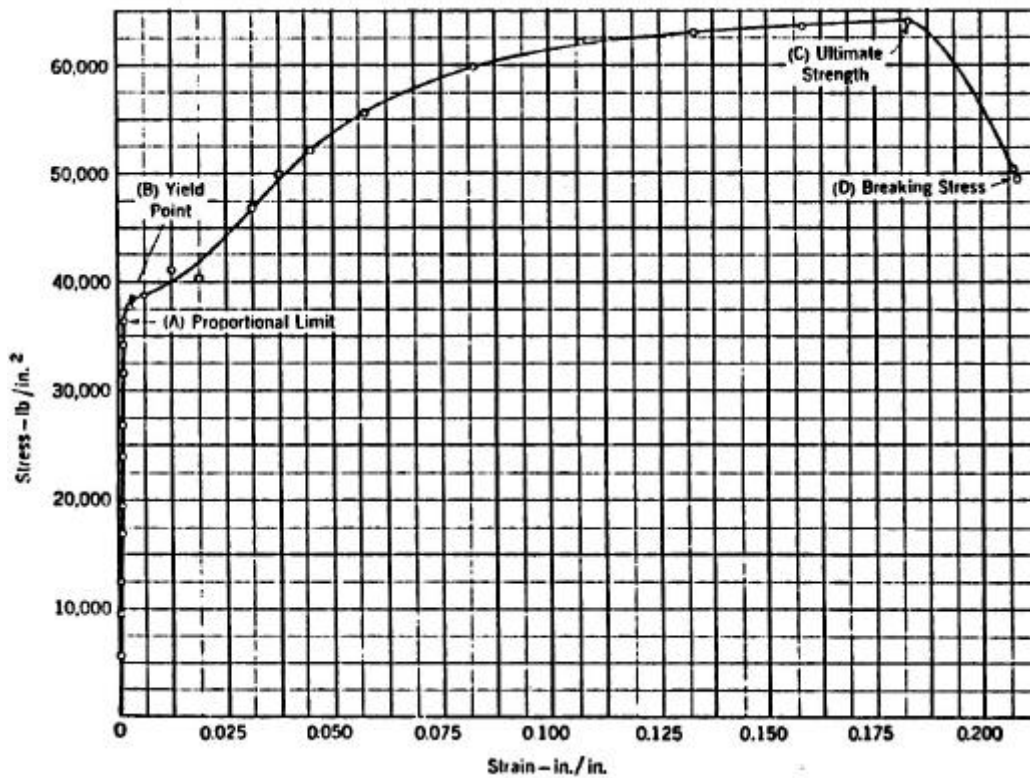


Figura 1.17 – Curva tensão-deformação convencional (ou de engenharia) para um aço baixo carbono, Boyer (1990).

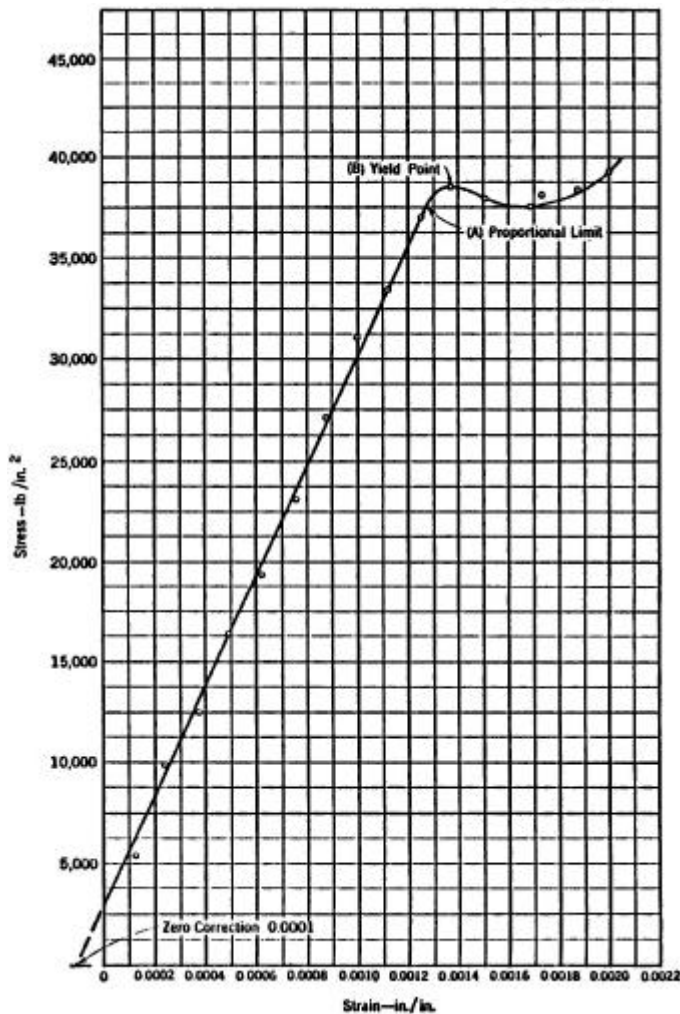


Figura 1.18 – Curva tensão-deformação, obtida pela medição da deformação por extensômetros, na região de carregamento onde ocorre o escoamento do CP, Boyer (1990).

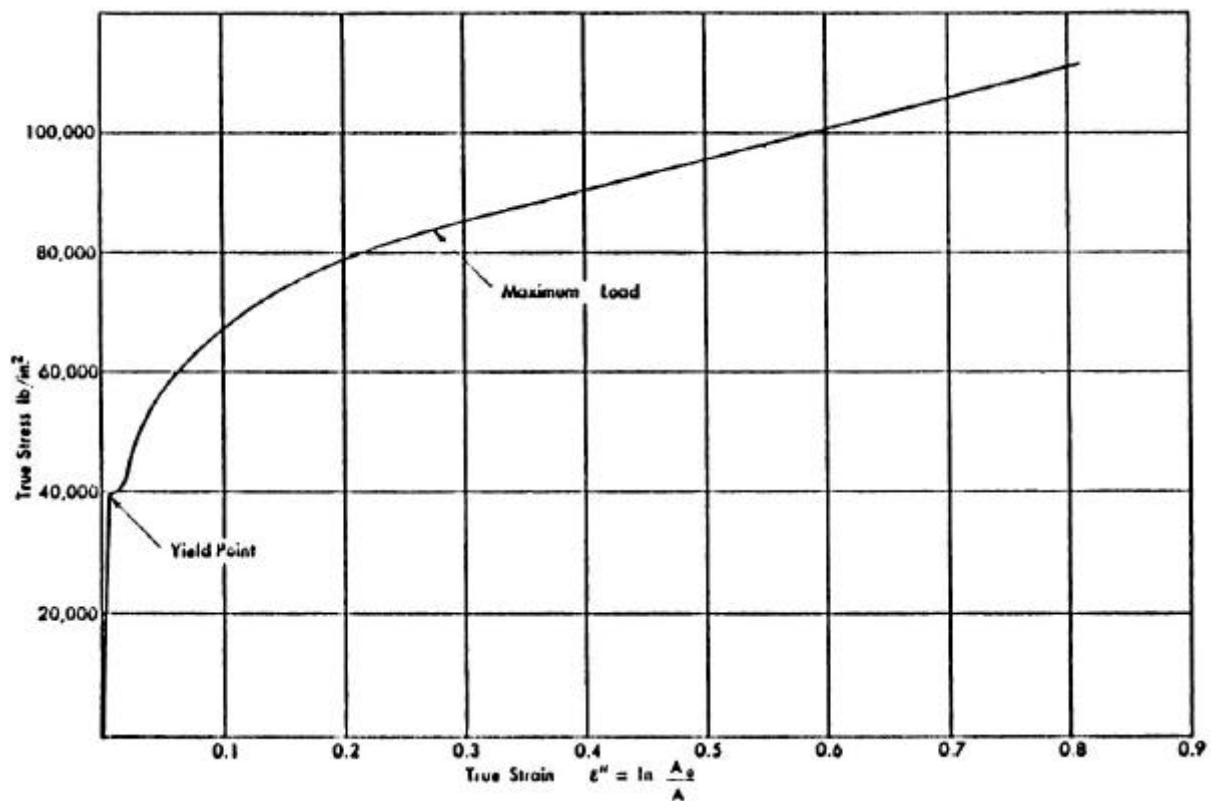


Figura 1.19 – Curva tensão-deformação real de um aço baixo carbono, Boyer (1990).

1.7.2.2 – Coeficiente de encruamento (n) e constante plástica de resistência (K):

Dentre as equações utilizadas para modelar o formato da curva tensão-deformação no regime plástico, destacam-se as seguintes:

- equação de Hollomon

$$\sigma = K\epsilon^n \quad (1.24)$$

- equação de Swift

$$\sigma = K(\epsilon_0 + \epsilon)^n \quad (1.25)$$

- equação de Ludwink

$$\sigma = \sigma_0 + K\epsilon^n \quad (1.26)$$

- equação de Voce

$$\sigma = a + (b-a) [1 - \exp(-n\epsilon)] \quad (1.27)$$

o aluno deve notar que todas as equações estão relacionando tensões reais (σ) com deformações reais (ϵ).

A equação mais utilizada é a equação de Hollomon, da qual o parâmetro n é conhecido como coeficiente de encruamento e é calculado a partir de dois pontos (1 e 2) da curva tensão-deformação, na região plástica, segundo a equação 1.28.

$$n = \frac{\log s_1 - \log s_2}{\log e_1 - \log e_2} \quad (1.28)$$

que também pode ser escrita de outra forma, utilizando-se as equações (1.19), (1.20) e (1.23),

$$n = \frac{\log\left(\frac{F_2 l_2}{F_1 l_1}\right)}{\log\left[\frac{\log\left(\frac{l_2}{l_0}\right)}{\log\left(\frac{l_1}{l_0}\right)}\right]} \quad (1.29)$$

Também é possível provar matematicamente que o valor do coeficiente de encruamento vale a deformação real no ponto de início de estricção:

$n = \epsilon_{\text{UTS}}$	(1.30)
-----------------------------	--------

A prova pode ser feita da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \sigma &= F / A \\ F &= \sigma \cdot A \\ dF &= \sigma dA + A d\sigma \end{aligned} \quad (1.31)$$

na estricção $dF = 0$ (a carga se estabiliza), ocorre a tensão máxima de engenharia $S = S_{\text{UTS}}$,

$$\begin{aligned} \sigma dA &= -A d\sigma \\ -(dA / A) &= (d\sigma / \sigma) \end{aligned} \quad (1.32)$$

porém, sabe-se pelas definições de deformação real e convencional:

$$\begin{aligned} \epsilon &= \ln (l/l_0) \\ d\epsilon &= 1/l \cdot dl = dl/l \end{aligned} \quad (1.33)$$

$$\begin{aligned} e &= \Delta l/l_0 = (l - l_0) / l_0 = (l/l_0) - 1 \\ de &= dl/l_0 \end{aligned} \quad (1.34)$$

admitindo-se constância de volume:

$$\begin{aligned} V &= c^{\text{te}} \\ l \cdot A &= l_0 \cdot A_0 = c^{\text{te}} \\ Adl + l dA &= 0 \\ Adl &= -l dA \\ (dl/l) &= -(dA/A) \end{aligned} \quad (1.35)$$

Substituindo (1.33) em (1.35) e levando o resultado em (1.32), obtêm-se:

$$(d\sigma/\sigma) = d\epsilon \therefore d\sigma/d\epsilon = \sigma \quad (1.35)$$

Derivando-se a equação de Hollomon ($\sigma = K\epsilon^n$) em relação à deformação real (ϵ):



$$\begin{aligned} d\sigma/d\varepsilon &= K n \varepsilon^{(n-1)} = n (K \varepsilon^n)/\varepsilon \\ d\sigma/d\varepsilon &= n \sigma / \varepsilon \end{aligned} \quad (1.36)$$

Substituindo-se a equação (1.35) na equação (1.36), obtêm-se, finalmente:

$$\sigma = n \sigma / \varepsilon \quad \therefore n = \varepsilon_{uts} \quad (1.37)$$

O valor de K também pode ser calculado com base em uma fórmula facilmente deduzível, conforme abaixo:

$$\begin{aligned} \sigma &= S \cdot (1+e) ; \\ \varepsilon &= \ln(1+e) \text{ ou } \exp(\varepsilon) = (1+e) \\ \sigma &= S \cdot \exp(\varepsilon) \end{aligned} \quad (1.38)$$

Porém:

$$\sigma = K \varepsilon^n \quad (1.39)$$

Substituindo (1.38) em (1.39),

$$\begin{aligned} S \cdot \exp(\varepsilon) &= K \varepsilon^n \\ K &= S \cdot \exp(\varepsilon) \cdot \varepsilon^{-n} \end{aligned} \quad (1.40)$$

no ponto de carregamento máximo no ensaio de tração $S=S_{uts}=LR$ e $\varepsilon_{uts}=n$ (1.37), assim:

$$K = S_{uts} [\exp(1)/n]^n \quad (1.41)$$

A equação (1.41) permite calcular o valor da constante plástica de resistência (K) a partir do limite de escoamento convencional do material (LR) e do seu coeficiente de encruamento (n), que pode ser calculado, equações (1.28) ou (1.29), a partir de uma curva tensão-deformação de engenharia, obtida em um ensaio de tração “comum”.

Esta é uma informação importante, pois permite fazer a caracterização do real comportamento plástico do material, através da equação $\sigma = K \varepsilon^n$, calculando-se os parâmetros K e n diretamente de uma curva tensão-deformação de engenharia.

1.7.2.3 – Coeficiente de anisotropia (R): o método de cálculo do coeficiente de anisotropia está descrito no item I.3.1 do anexo I, sendo que as principais equações estão listadas abaixo:

$$R = \frac{e_{\text{Real-largura}}}{e_{\text{Real-espessura}}} = \frac{\ln \frac{w}{w_0}}{\ln \frac{t}{t_0}} = \frac{\ln \frac{w}{w_0}}{\ln \frac{L_0 \cdot w_0}{L \cdot w}} \quad (1.42)$$

$$\bar{R} = \frac{(R_{0^\circ} + 2 \cdot R_{45^\circ} + R_{90^\circ})}{4}, \text{ anisotropia normal.} \quad (1.43)$$

$$\Delta R = \frac{(R_{0^\circ} - 2 \cdot R_{45^\circ} + R_{90^\circ})}{4}, \text{ anisotropia planar.} \quad (1.44)$$

Maiores detalhes sobre o ensaio de tração podem ser obtidos no anexo I desta apostila. Na lista de exercícios (item 1.11) estão dispostas algumas tabelas com valores das variáveis aqui discutidas para alguns materiais testados em tração.

1.8 – Critérios de Escoamento

Visto como se obter o limite de escoamento de um material (σ_{ys}), segundo o ensaio de tração, agora será discutido como determinar se um componente ou peça deverá entrar ou não em escoamento. A idéia é utilizar um critério, que possua fundamentação mecânica e que possa ser aplicado para o caso simplificado do ensaio de tração de modo a se obter parâmetros para sua aplicação. Serão vistos os três critérios descritos a seguir.

1. Critério de máxima tensão normal ou de Rankine.
2. Critério de máxima tensão cisalhante ou de Tresca.
3. Critério de máxima energia de distorção ou de von Mises

1.8.1 – Critério de máxima tensão normal

De acordo com este critério simples, deformação plástica deverá ocorrer quando a maior tensão principal (σ_1) alcançar e/ou ultrapassar a tensão de escoamento (σ_{ys} ou LE) obtida no ensaio uniaxial de tração, segundo descrito pela equação (1.45).

$$\sigma_1 \geq \sigma_{ys} \quad (1.45)$$

A grande falha deste critério é não levar em consideração os diferentes estados de tensão que pode estar submetido o material, para iguais valores da tensão principal σ_1 como, por exemplo, o estado hidrostático. Obviamente, se este critério fosse válido, muitas estruturas submetida a condições de pressão hidrostática elevadas não resistiriam e se deformariam plasticamente, o que não é o caso.

1.8.2 – Critério de máxima tensão cisalhante

Foi comprovado que a deformação plástica está diretamente associada à presença de componentes de tensão cisalhante. Por isso, criou-se um critério de escoamento que define a ocorrência de deformação plástica, mesmo em estados complexos de tensão, quando o valor do componente de tensão de cisalhamento máximo (τ_2 – vide figura 1.10) alcance um valor mínimo, que pode ser obtido diretamente do ensaio de tração.

O valor do componente de tensão de cisalhamento máximo (τ_2) é dado pela equação:

$$\tau_2 = \tau_{máx} \geq \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \quad (1.46)$$

Onde σ_1 é a maior tensão principal e σ_3 é a menor.

Observando as condições de escoamento de um ensaio de tração têm-se:

- $\sigma_1 \neq 0$ ($=\sigma_{ys}$)
- $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$

o que oferece o critério de escoamento, conforme a equação 1.47:

$$\tau_2 = \tau_{máx} \geq \frac{\sigma_{ys}}{2}, \text{ ou} \quad (1.47)$$



$$(\sigma_1 - \sigma_3) \geq \sigma_{ys} \quad (1.48)$$

Este critério não prediz a ocorrência de deformação plástica em um estado de tensões hidrostático, conforme definido pela equação (1.6) e representado pela figura 1.8.

Ponto interessante é que o parâmetro de comparação deste critério é a máxima tensão de cisalhamento, que por acaso define, matematicamente, o valor do raio de um círculo de Mohr. Assim, quanto maior for o círculo de Mohr, maior a probabilidade de ocorrer escoamento.

1.8.3 – Critério da máxima energia de deformação

Antes de entrar neste critério, deve-se fazer referência ao cálculo da energia de deformação elástica de um material. Esta energia pode ser calculada, para um corpo sob solicação uniaxial de tensões, pela clássica equação que relaciona força versus distância, conforme citada abaixo (1.49):

$$dU = F \cdot dl \quad (1.49)$$

Sabendo-se que $l_i = l_0(1+e_1)$ e $\sigma = F/A$, calcula-se, a partir da equação (1.49):

$$\begin{aligned} l_i &= l_0(1+e_1) \therefore dl = l_0 de_1 \\ \sigma &= F/A \therefore F = \sigma_1 \cdot A_0 \end{aligned} \quad (1.50)$$

Neste caso utiliza-se A_0 , pois a alteração da área da secção reta é muito pequena para considerar as correções citadas no item 1.7. Agrupando os termos da equação (1.50) e integrando-a, por unidade de volume, obtêm-se:

$$U_{Total} = \int_{l_0}^{l_f} F \cdot dl = A_0 l_0 \int_0^{e_f} s_1 de_1 \quad (1.51)$$

considerando o cálculo da equação (1.51) por unidade de volume (dividi-se por $A_0 \cdot l_0$) e considera-se válida a lei de Hooke (equação 1.13), faz-se a integração, obtendo-se:

$$U_{Total} = \int_0^{e_f} s_1 de_1 = \frac{1}{2} s_1 e_f \quad (1.52)$$

Somando as respectivas energias nos outros dois eixos, considerando que estas não causem interferência mútua, pode-se obter:

$$U_{Total} = \int_0^{e_f} s_1 de_1 = \frac{1}{2} s_1 e_f = \frac{1}{2} (s_1 e_1 \cdot s_2 e_2 \cdot s_3 e_3) \quad (1.53)$$

Pode-se demonstrar, matematicamente que a equação acima (1.53) pode ser expressa como sendo a soma de um termo correlacionado somente com as tensões hidrostáticas e outro termo correlacionado com as tensões desviatórias (vide figura 1.8).

Neste caso, a expressão fica:



- Energia hidrostática (U_0^H):

$$U_0^D = \frac{1-2n}{6E} (s_1 + s_2 + s_3)^2 \quad (1.54)$$

- Energia desviatória (U_0^D):

$$U_0^D = \frac{1+n}{6E} [(s_1 - s_2)^2 + (s_1 - s_3)^2 + (s_2 - s_3)^2] \quad (1.55)$$

O critério elaborado por von Mises, admite que o material inicie deformação plástica quando a energia elástica de distorção por unidade de volume (U_0^D – equação 1.55) atinge um valor limite que é característico do material. Considerando o ensaio de tração e aplicando-se os valores de tensão de escoamento na equação (1.55), vêm:

$$U_0^D = \frac{1+n}{6E} (s_{ys})^2 \quad (1.56)$$

Igualando esta equação à expressão da energia de distorção, obtêm-se a expressão para o critério de escoamento de von Mises:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(s_1 - s_2)^2 + (s_1 - s_3)^2 + (s_2 - s_3)^2} \geq s_{ys} \quad (1.57)$$

Quando $\sigma_1 = \sigma_2$ ou $\sigma_2 = \sigma_3$, então os critérios de von Mises e Tresca coincidem. Os dois critérios apresentam uma diferença máxima em um estado plano de deformação, quando:

$$\sigma_2 = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3) \quad (1.58)$$

neste caso a diferença é de $2/(3)^{0,5} \approx 1,15$. A figura 1.20 apresenta um gráfico demonstrando que os dois critérios de tensão coincidem para $\sigma_1 = \sigma_2$ ou $\sigma_2 = \sigma_3$ e que divergem no máximo de 1,15 para deformação plana.

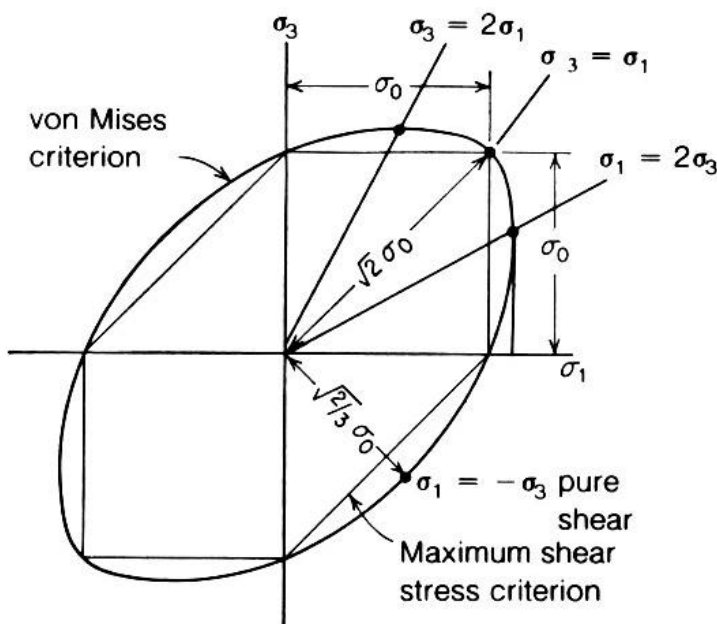


Figura 1.20 – Representação gráfica das curvas limite de escoamento (fora das quais existem tensões atuando que provocam deformação plástica). Nota-se a combinação de tensões que levam aos dois critérios estabelecer a mesma condição de escoamento ($\sigma_1 = \sigma_3$) e a condição de máxima diferença ($\sigma_1 = 2\sigma_3$ ou $\sigma_1 = \frac{1}{2}\sigma_3$), Dieter (1988).

Os reais valores de tensão, onde ocorre o escoamento dos materiais metálicos, situam-se, em média, entre as regiões definidas pelos critérios de Tresca e de von Mises, de acordo com o gráfico apresentado por Dowling (figura 1.21) e por Meyers e Chawla (figura 1.22).

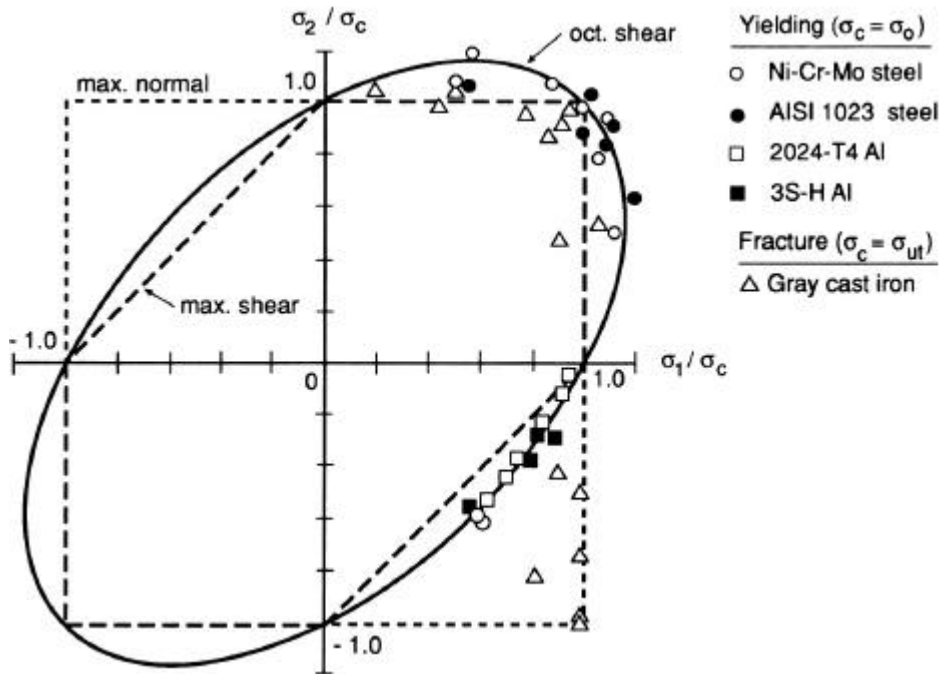


Figura 1.21.a – Previsão de escoamento no estado plano de tensão para várias classes de materiais metálicos, Dowling (1993).

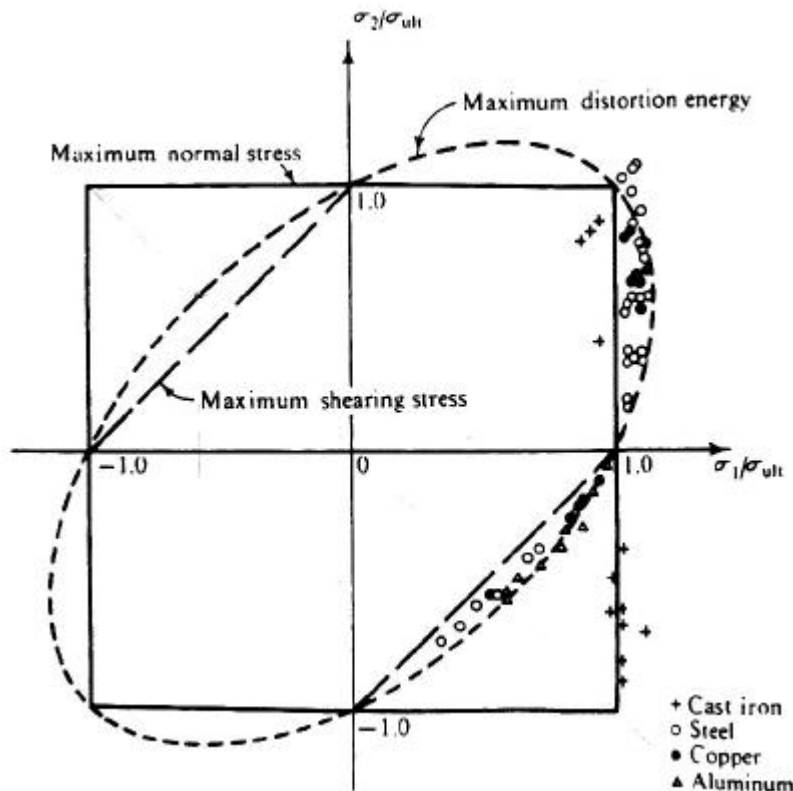


Figura 1.21.b – Comportamento sob escoamento de alguns materiais comparando com os três critérios de escoamento deste item, Meyers & Chawla (1984).

O aluno deve perceber que os critérios de escoamento são todos baseados nos valores de tensões, conforme conceito de estado de tensões em um ponto apresentado no item 1.2. Portanto, é possível que um material possua uma distribuição de tensões que causa escoamento (deformação plástica) somente em algumas regiões ou pontos de seu volume.



1.8.4 – Tensão e Deformação efetivas

Dois estados de tensão são mecanicamente equivalentes quando produzem o mesmo efeito em um material, com relação à deformação ou conformação plástica deste. A maneira mais simples de comparar dois estados de tensão é pelos critérios de escoamento. Se dois estados de tensão diferentes, por exemplo aqueles representados pelos respectivos tensores de tensão (1) e (2) abaixo, são suficientes para iniciar a deformação plástica, segundo um critério de escoamento, então estes estados são semelhantes. Deve-se notar que é possível que dois estados produzam o mesmo efeito, no caso início de deformação plástica, mesmo que os valores de tensões foram todos diferentes entre si ($\sigma_{i1} \neq \sigma_{i2}$ e $\tau_{ij1} \neq \tau_{ij2}$).

$$\begin{vmatrix} \sigma_X & \tau_{YX} & \tau_{ZX} \\ \tau_{XY} & \sigma_Y & \tau_{ZY} \\ \tau_{XZ} & \tau_{YZ} & \sigma_Z \end{vmatrix} \quad (1) \qquad \begin{vmatrix} \sigma_X & \tau_{YX} & \tau_{ZX} \\ \tau_{XY} & \sigma_Y & \tau_{ZY} \\ \tau_{XZ} & \tau_{YZ} & \sigma_Z \end{vmatrix} \quad (2)$$

Neste caso, como o efeito de ambos os estados (no caso o limiar de deformação plástica) é mecanicamente igual, então se diz que estes estados são mecanicamente similares ou efetivamente iguais. A definição mais usual para as tensões e deformações efetivas é a fornecida com base nas considerações de energia de distorção oferecida por von Mises e expressa pelas equações (1.59) e (1.60).

$$s_e = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(s_1 - s_2)^2 + (s_1 - s_3)^2 + (s_2 - s_3)^2} \quad (1.59)$$

$$de_e = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(de_1 - de_2)^2 + (de_2 - de_3)^2 + (de_3 - de_1)^2} \quad (1.60)$$

a equação acima (1.60) pode ser simplificada, admitindo-se que o produto entre deformações pode ser desprezado, para a seguinte forma:

$$de_e = \sqrt{\frac{2}{3} (de_1^2 + de_2^2 + de_3^2)} \quad (1.61)$$

ou em termos de deformação plástica total:

$$e_e = \sqrt{\frac{2}{3} (e_1^2 + e_2^2 + e_3^2)} \quad (1.62)$$

Os termos de deformação ($d\epsilon_i$ ou ϵ_i) das equações de cálculo da deformação efetiva (equações 1.60 a 1.62) devem ser a porção plástica da deformação total do material, ou seja, valores como os mostrados na equação (1.63), abaixo:

$$e_i^{Plástico} = e_i^{Total} - e_i^{Elástica} \quad (1.63)$$

como os termos de deformação elástica são, geralmente, muito pequenos então aproxima-se os valores de deformação das equações de cálculo da deformação efetiva como sendo a deformação total do material.

1.9 – Relações entre tensão e deformação no regime plástico

As relações entre tensão e deformação no regime plástico são semelhantes àsquelas para o regime elástico, mas com duas grandes distinções:

- as deformações envolvidas sempre devem ser calculadas pela definição de deformação verdadeira – equação (1.12), feita por meio do logaritmo da diferença entre a dimensão final e inicial ($\epsilon = \ln l_f/l_0$), no regime plástico não vale a aproximação de que a deformação real é praticamente igual à deformação convencional ($\epsilon \neq e$);
- a deformação plástica final depende da história do carregamento mecânico a que foi submetido a peça/componente.

Na plasticidade é necessário, com base nas tensões e deformações efetivas atuantes, calcular quais são os incrementos de deformação ao longo de todo o ciclo de carregamento e somar todos estes incrementos (integrá-los) de modo a se obter a deformação plástica final do material.

Como exemplo, considere-se um pequeno cilindro metálico de 10mm de altura. Este cilindro sofre o processamento mostrado na figura 1.22, ou seja, é alongado até 11mm e depois comprimido de volta a sua dimensão original (10mm).

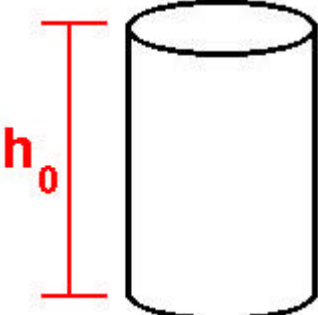
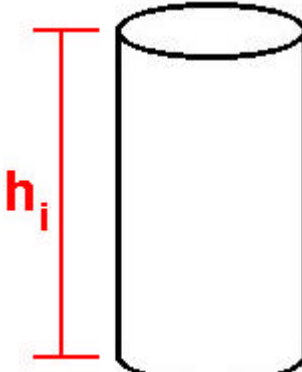
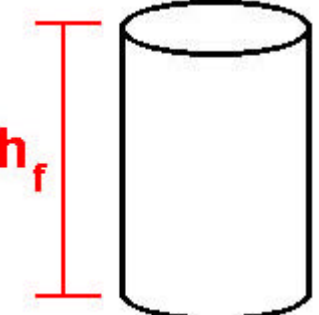
Estado inicial ($h_0=3,5\text{mm}$)	Estado intermediário ($h_i=4,5\text{mm}$)	Estado final ($h_f=3,5\text{mm}$)
		
	Processo 1 ($h_0 \rightarrow h_i$)	Processo 2 ($h_i \rightarrow h_f$)

Figura 1.22 – Exemplificação de um processo de conformação plástica simples (escala 1:1).

Se for considerado somente as dimensões inicial ($h_0=3,5\text{mm}$) e final ($h_f=3,5\text{mm}$), o valor de deformação obtido seria:

$$e_{0 \rightarrow f} = \int_{3,5}^{4,5} \frac{dh}{h} + \int_{4,5}^{3,5} \frac{dh}{h} = \ln \frac{4,5}{3,5} - \ln \frac{3,5}{4,5} = 0,2513 + (-0,2513) = 0$$

Porém, considerando todo o processo como um somatório de incrementos e considerando que a deformação em cada etapa gera um consumo de energia, ou seja, processos que necessitam de força para ocorrer, então o real valor de deformação a ser considerado seria 0,5:

$$e_{0 \rightarrow f} = \int_{3,5}^{4,5} \frac{dh}{h} + \int_{4,5}^{3,5} -\frac{dh}{h} = \ln \frac{4,5}{3,5} - \ln \frac{3,5}{4,5} = 0,2513 - (-0,2513) = 0,5026$$



As seguintes equações, devidas à Levy-Mises, correlacionam tensões e deformações plásticas:

$$\left. \begin{aligned} de_1 &= \frac{3}{2} \frac{de_e}{\sigma_e} (\sigma_1 - \sigma_0) \\ de_2 &= \frac{3}{2} \frac{de_e}{\sigma_e} (\sigma_2 - \sigma_0) \\ de_3 &= \frac{3}{2} \frac{de_e}{\sigma_e} (\sigma_3 - \sigma_0) \end{aligned} \right| \begin{aligned} de_1 &= \frac{de_e}{\sigma_e} \left[\sigma_1 - \frac{1}{2} (\sigma_2 + \sigma_3) \right] \\ de_2 &= \frac{de_e}{\sigma_e} \left[\sigma_2 - \frac{1}{2} (\sigma_1 + \sigma_3) \right] \\ de_3 &= \frac{de_e}{\sigma_e} \left[\sigma_3 - \frac{1}{2} (\sigma_1 + \sigma_2) \right] \end{aligned}$$

A aplicação das equações, como já visto anteriormente, deve se feita considerando cada etapa da conformação. Para isso, recomenda-se o seguinte procedimento:

1. Deve ser dado o estado inicial de tensões e deformações ($\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$) e (e_1, e_2, e_3).
2. Incrementa-se ligeiramente, segundo a seqüência de estados de tensão desejada, os valores de $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ até $\sigma'_1, \sigma'_2, \sigma'_3$.
3. Deve ser dada a curva $\sigma_e \times e_e$ para o material. A partir de $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, calcula-se σ_e e, a partir de $\sigma'_1, \sigma'_2, \sigma'_3$, calcula-se σ'_e . Com os valores de σ_e e σ'_e , e com a curva $\sigma_e \times e_e$, avalia-se de_e .
4. Calculam-se de_1, de_2, de_3 , considerando, nas equações 2.34, o valor de de_e encontrado, $\sigma_e = \sigma'_e, \sigma_1 = \sigma'_1, \sigma_2 = \sigma'_2, \sigma_3 = \sigma'_3$.
5. Adiciona-se: $e_1 + de_1, e_2 + de_2, e_3 + de_3$, chegando ao estado de deformações e'_1, e'_2, e'_3 .
6. Dá-se novo incremento a $\sigma'_1, \sigma'_2, \sigma'_3$ até $\sigma''_1, \sigma''_2, \sigma''_3$ segundo a seqüência de estados de tensão desejada, repetindo-se as etapas 3, 4, 5, até obter-se e''_1, e''_2 e e''_3 .
7. Repetem-se os incrementos de tensão até atingir o estado final de tensão, quando então se obterá o estado final de deformação.

1.10 - Limite máximo de deformação

A conformação plástica de um material somente é possível até um determinado limite que cada material pode suportar. No ensaio de tração, este valor pode ser expresso pelo alongamento obtido em um ensaio de tração convencional ou de engenharia ou pelo valor de deformação máxima real (vide figura 1.16). A deformação máxima que um material pode suportar em conformação plástica depende de três condições listadas a seguir.

1. **Estado de tensões:** tensões de tração provocam a ruptura antes que tensões de compressão, assim a capacidade de deformação máxima aumenta quanto maiores forem as componentes de compressão ou quanto mais compressiva for a tensão efetiva aplicada ao componente e/ou peça (equação 1.59). Além disso, em todos os processos de deformação ocorrem perdas devido ao atrito e



movimento de internos de defeitos (discordâncias nos metais) que aumenta o esforço de conformação e, conseqüentemente, a dificuldade de deformação.

2. **Temperatura a que se passa a conformação**: com o aumento da temperatura, aumenta-se o limite de deformação máxima, inicialmente pela diminuição do limite de escoamento e depois pelas mudanças estruturais que ocorrem nos metais (recristalização). Porém, certos efeitos peculiares, que podem ocorrer em determinadas temperaturas, podem diminuir a capacidade de conformação do material (por exemplo envelhecimento pode deformação). No capítulo dois serão apresentados maiores detalhes sobre a influência da temperatura sobre as características de conformação plástica dos metais.
3. **Velocidade de deformação imposto ao material**: com o aumento da velocidade de deformação ou da taxa de deformação ($\dot{\epsilon}$), aumenta-se a tendência do material a endurecer mais rapidamente e a apresentar fraturas durante o processo de conformação plástica. Maiores detalhes também serão apresentados no capítulo dois.

1.11 – Bibliografia

Os livros destacados com um ponto (•) são recomendados como livros-texto deste capítulo da disciplina.

- BOYER, H.; **Atlas of stress-strain curves**. ASM International, 2nd printing, Materials Park, 1990.
- DIETER, G. E.; **Mechanical Metallurgy**. SI Metric edition. McGraw Hill, Singapore, 1988. (existe uma versão anterior que foi traduzida para o português)
 - DOWLING, N.E.; **Mechanical Behavior of Materials**. Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, 1993.
 - HELMAN, H.; CETLIN, P.R.; **Fundamentos da Conformação Mecânica dos Metais**. Editora Guanabara Dois, 19__.
 - MOURA BRANCO, C.A.G; **Mecânica dos Materiais**. Fundação Calouste Gulbenkian, 2^a edição, Porto, 1994.
 - MEYERS, M.A.; CHAWLA, K.K.; **Principles of Mechanical Metallurgy**. Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, 1984.
 - SCHAEFFER, L.; **Conformação Mecânica**. Imprensa Livre Editora, Porto Alegre, 1999.