

Estado triplo de tensão

Tensões em um ponto

Seja um ponto qualquer, pertencente a um corpo em equilíbrio, submetido às tensões representadas na figura 1.

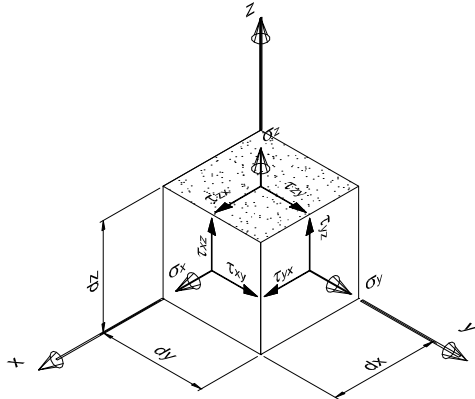


Figura 1 – Estado geral de tensões em um ponto.

Sabe-se que uma tensão é função de ponto e plano. Assim, para um plano inclinado, em relação aos apresentados na figura, irão atuar outras tensões, como mostra a figura 2.

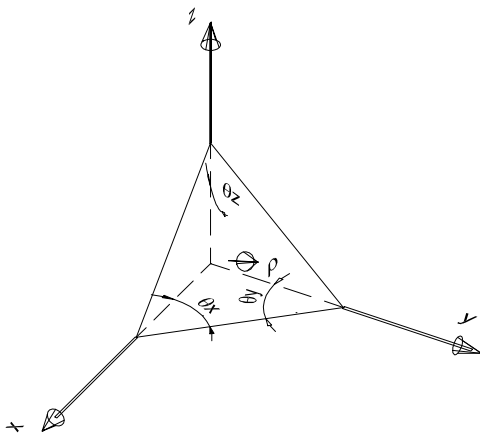


Figura 2 – Tensão resultante em um plano qualquer de um estado geral de tensões.

Os ângulos entre o plano considerado e os eixos **x**; **y** e **z**, são θ_x , θ_y e θ_z , respectivamente.

Com esta consideração, a força resultante no plano inclinado, expressa pelas suas componentes nas direções **x**, **y** e **z**, pode ser determinada por:

$$(pdA)_x = \sigma_x dA \cos \theta_x + \tau_{yx} dA \cos \theta_y + \tau_{zx} dA \cos \theta_z$$

$$(pdA)_y = \tau_{xy} dA \cos \theta_x + \sigma_y dA \cos \theta_y + \tau_{zy} dA \cos \theta_z \quad (1)$$

$$(pdA)_z = \tau_{xz} dA \cos \theta_x + \tau_{yz} dA \cos \theta_y + \sigma_z dA \cos \theta_z$$

Com isto, os três componentes ortogonais da tensão resultante são:

$$\rho_x = \sigma_x \cos \theta_x + \tau_{yx} \cos \theta_y + \tau_{zx} \cos \theta_z$$

$$\rho_y = \tau_{xy} \cos \theta_x + \sigma_y \cos \theta_y + \tau_{zy} \cos \theta_z \quad (2)$$

$$\rho_z = \tau_{xz} \cos \theta_x + \tau_{yz} \cos \theta_y + \sigma_z \cos \theta_z$$

As três componentes da tensão ρ , podem ser assim determinadas pelo produto de duas matrizes:

$$\rho = \begin{pmatrix} \rho_x \\ \rho_y \\ \rho_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos \theta_x \\ \cos \theta_y \\ \cos \theta_z \end{pmatrix}$$

Observa-se, então, que qualquer seja o plano inclinado, a tensão nele resultante é igual ao produto entre a matriz das tensões dos planos ortogonais e a matriz dos co-senos dos ângulos do plano.

Os co-senos são chamados de co-senos diretores, e sua matriz é chamada de matriz dos co-senos diretores. A matriz das tensões se dá o nome de **Tensor (T)**.

Ao tensor, não é possível se dar uma interpretação geométrica simples. Ele é encarado, apenas,

como uma matriz onde cada elemento representa uma das tensões encontradas na expressão 2.

Desta maneira o tensor $\mathbf{T}$, para um estado geral de tensões fica:

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix} \quad (3)$$

Eixos e Tensões Principais.

A tensão p que atua no plano inclinado pode ser representada por suas componentes: normal (σ) e de cisalhamento (τ), como mostra a figura 3.

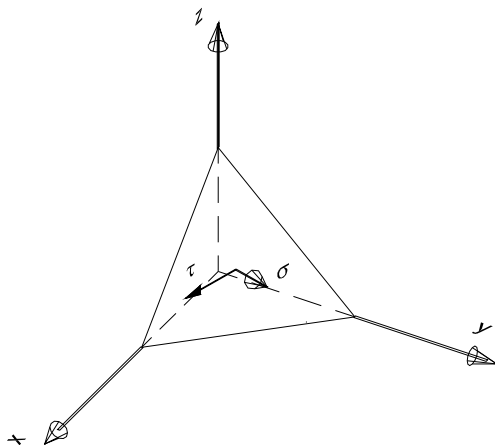


Figura 3 – tensão normal e de cisalhamento, componentes da tensão p .

A tensão normal resultante (σ), neste plano inclinado, é obtida por:

$$\sigma = \sigma_x \cos^2 \theta_x + \sigma_y \cos^2 \theta_y + \sigma_z \cos^2 \theta_z + 2\tau_{xy} \cos \theta_x \cos \theta_y + 2\tau_{yz} \cos \theta_y \cos \theta_z + 2\tau_{xz} \cos \theta_x \cos \theta_z$$

Note-se que, se o elemento inicial estiver inclinado em relação ao sistema apresentado, como se observa na figura 4, a tensão no plano inclinado deve permanecer a

mesma. Observa-se ainda que neste elemento inclinado ocorrem transformações nas tensões atuantes em cada plano já que ocorre mudança de plano.

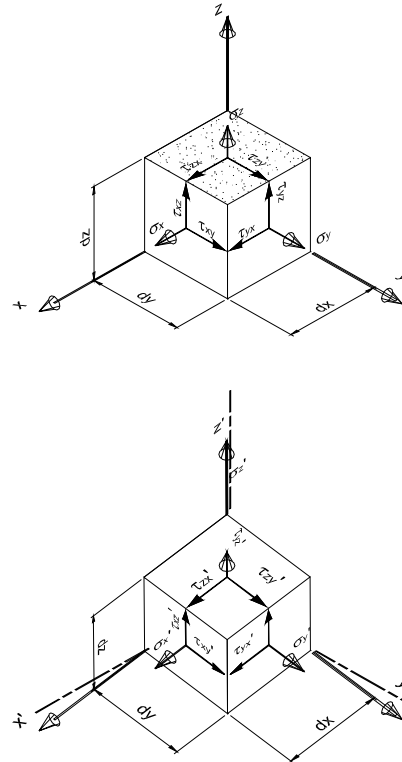


Figura 4 – inclinação do elemento em relação à posição inicial

Assim, é possível existir uma posição para o elemento, nestes planos tri-ortogonais, onde as tensões de cisalhamento sejam iguais a zero.

A esta posição se dá o nome de posição principal, aos planos ortogonais se dá o nome de **planos principais** e às tensões normais que neles atuam se dá o nome de **tensões principais**.

Estas tensões são indicadas por σ_1 ; σ_2 e σ_3 , a partir da maior para a menor. Os planos respectivos onde atuam estas tensões, são indicados por 1; 2 e 3.

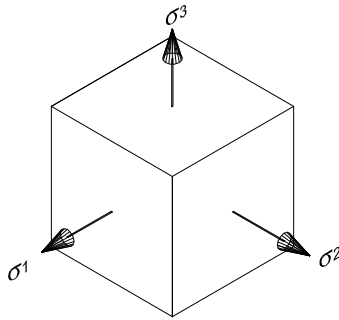


figura 5 – planos e tensões principais

Chamando de θ_1 ; θ_2 e θ_3 , os ângulos entre o plano inclinado e os planos principais 1; 2 e 3, respectivamente, é possível escrever:

$$\rho = \begin{pmatrix} \rho_x \\ \rho_y \\ \rho_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos \theta_1 \\ \cos \theta_2 \\ \cos \theta_3 \end{pmatrix} \quad (4)$$

Assim, o tensor das tensões principais, é o tensor principal do estado de tensões.

$$T = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} \quad (5)$$

Com isto, as componentes da tensão ρ , ficam:

$$\begin{aligned} \rho_x &= \sigma_1 \times \cos \theta_1 \\ \rho_y &= \sigma_2 \times \cos \theta_2 \\ \rho_z &= \sigma_3 \times \cos \theta_3 \end{aligned} \quad (6)$$

Lembrando que:

$$\cos^2 \theta_1 + \cos^2 \theta_2 + \cos^2 \theta_3 = 1 \quad (7)$$

Das expressões 6 e 7, é possível escrever:

$$\left(\frac{\rho_x}{\sigma_1} \right)^2 + \left(\frac{\rho_y}{\sigma_2} \right)^2 + \left(\frac{\rho_z}{\sigma_3} \right)^2 = 1 \quad (8)$$

Esta expressão mostra que os valores ρ_x ; ρ_y e ρ_z , podem ser encarados como coordenadas da extremidade do vetor da tensão ρ . O lugar geométrico das extremidades do vetor da tensão total forma um elipsóide, cujos semi-eixos são as tensões principais σ_1 ; σ_2 e σ_3 . O elipsóide chama-se elipsóide das tensões.

Desta figura geométrica deduz-se que a maior das três tensões principais é o maior valor possível de tensão no conjunto de planos que passam pelo ponto. Deduz-se, ainda, que a menor das tensões principais é a menor das tensões normais.

Determinação das tensões principais.

Seja o estado de tensões da figura 1 e um plano inclinado como o mostrado na figura 2. se este plano for um dos principais, a tensão resultante será uma tensão normal (σ).

Assim, as componentes desta tensão normal podem ser escritas como:

$$\sigma = \begin{pmatrix} (\sigma)_x \\ (\sigma)_y \\ (\sigma)_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos \theta_x \\ \cos \theta_y \\ \cos \theta_z \end{pmatrix} \quad (9)$$

ou seja:

$$\begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos \theta_x \\ \cos \theta_y \\ \cos \theta_z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} (\sigma)_x \\ (\sigma)_y \\ (\sigma)_z \end{pmatrix} = 0 \quad (10)$$

Lembrando que:

$$(\sigma)_x = \sigma \times \cos \theta_x$$

$$(\sigma)_y = \sigma \times \cos \theta_y$$

$$(\sigma)_z = \sigma \times \cos \theta_z$$

é possível escrever:

$$\left(\begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \sigma \\ \sigma \\ \sigma \end{pmatrix} \right) \times \begin{pmatrix} \cos \theta_x \\ \cos \theta_y \\ \cos \theta_z \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos \theta_x \\ \cos \theta_y \\ \cos \theta_z \end{pmatrix} = 0 \quad (11)$$

Lembrando que a matriz dos co-senos diretores não pode ser nula (vide expressão 7), para que o produto mostrado na expressão 11 seja nulo existe a necessidade do determinante da matriz das tensões ser igual a zero:

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma \end{vmatrix} = 0 \quad (12)$$

Note-se aqui que, sendo σ uma tensão principal, seu valor independe do conhecimento prévio da posição do plano em que ela ocorre. Ele depende, apenas, do estado de tensões que atua no ponto.

A solução do sistema apresentado na expressão 12 é dada por:

$$\sigma^3 - \sigma^2 \times J_1 + \sigma \times J_2 - J_3 = 0 \quad (13)$$

onde

$$J_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$$

$$J_2 = \sigma_y \times \sigma_z + \sigma_x \times \sigma_z + \sigma_y \times \sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{xz}^2 - \tau_{yz}^2$$

$$J_3 = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix}$$

(14)

Círculo de Mohr para o Estado Triplo de Tensão.

Seja um ponto e suas tensões principais σ_1 ; σ_2 e σ_3 . Seja, também um plano inclinado com um ângulo α , em relação aos planos 1 e 3.

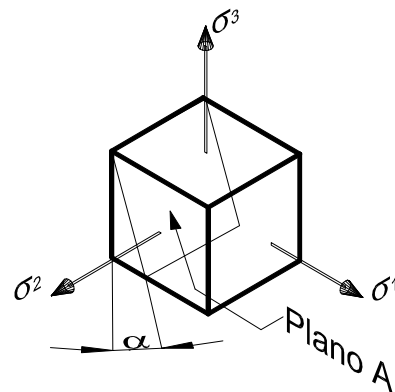


figura 6 – Planos principais; tensões principais e plano inclinado.

As tensões: normal e de cisalhamento, neste plano, podem ser determinadas por:

$$\sigma = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \times \cos 2\alpha \quad (13)$$

$$\tau = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \times \sin 2\alpha$$

Note-se que estas tensões podem, também, ser determinadas pelo Círculo de Mohr para o estado duplo de tensão.

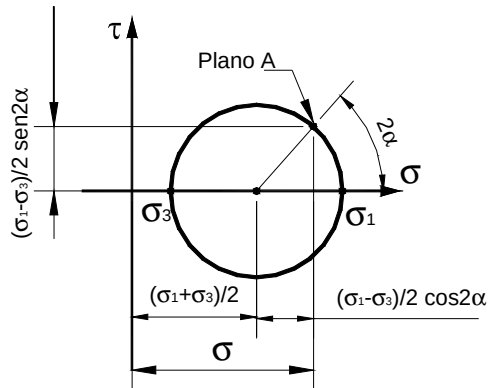


figura 7 – Círculo de Mohr para os planos 1; 3 e o inclinado

Caso o plano esteja inclinado em relação aos planos 2 e 3, como mostra a figura 8, tem-se o Círculo de Mohr apresentado na figura 9.

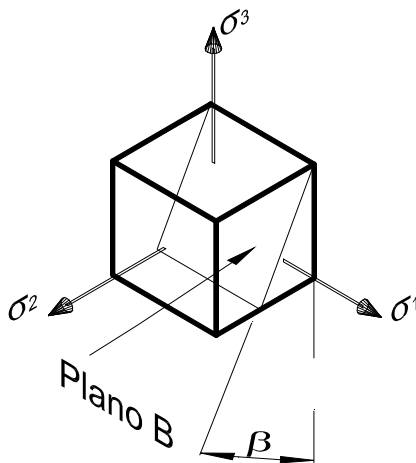


figura 8 – Plano inclinado em relação aos planos 2 e 3.

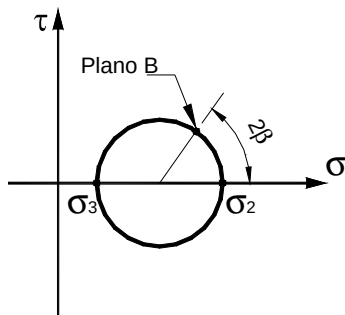


figura 9 – Círculo de Mohr para os planos 2; 3 e o inclinado

O mesmo tipo de estudo pode ser feito para um plano inclinado em relação aos planos 1 e 2, como mostra a figura 10.

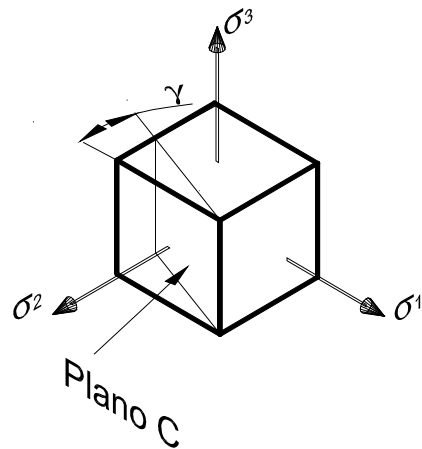


figura 10 – Plano inclinado em relação aos planos 1 e 2.

O Círculo de Mohr para esta situação está mostrado na figura 11

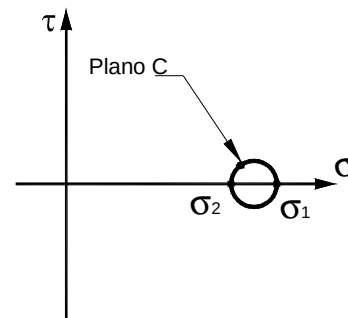


figura 11 – Círculo de Mohr para os planos 1; 2 e o inclinado

Note-se que é possível fazer uma superposição dos Círculos de Mohr para os três casos. Isto pode ser observado na figura 12

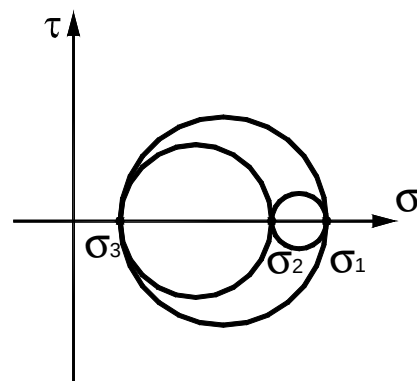


figura 12 – Círculo de Mohr para os três estudos superpostos.

Um plano inclinado qualquer, em relação aos três planos, simultaneamente, como o mostrado na figura 13, tem seu ponto representativo na área limitada pelos três Círculos de Mohr (arbelos). Isto pode ser observado na figura 14.

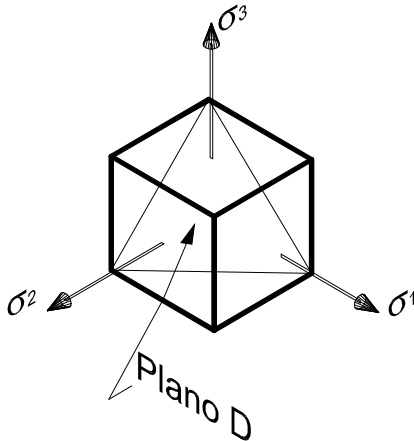


figura 13 – Plano inclinado qualquer e os planos principais

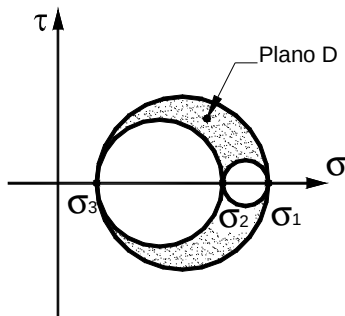


figura 14 – Círculo de Mohr para um plano qualquer.

OBS:-

1. Usualmente a representação do Círculo de Mohr é feita, apenas, pelo semicírculo superior, como mostra a figura 15

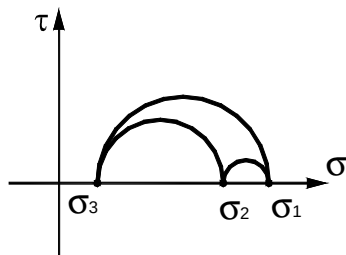


figura 15 – Representação usual do Círculo de Mohr.

2. Qualquer estado de tensão pode ser interpretado como um caso particular do estado tripo de tensão. As figuras 16 e 17, mostram, respectivamente, os estados de tração simples e cisalhamento puro.

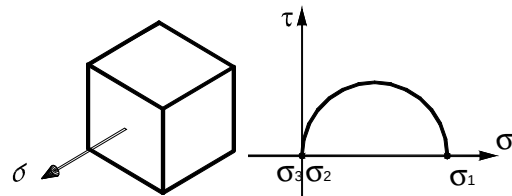


figura 16 – Círculo de Mohr para a tração simples

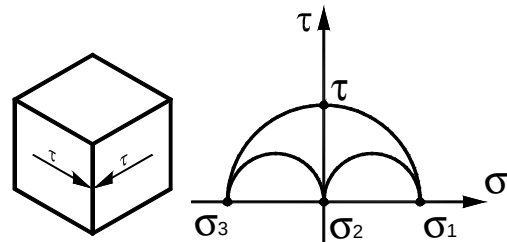


figura 16 – Círculo de Mohr para o cisalhamento puro

3. Desde que seja conhecida uma das tensões principais, as demais podem ser determinadas por um estudo semelhante ao estado duplo de tensão.