

Estado de deformação em um ponto

Estado plano de deformações

Seja um ponto em um estrado duplo de tensões, como mostra a figura 1.

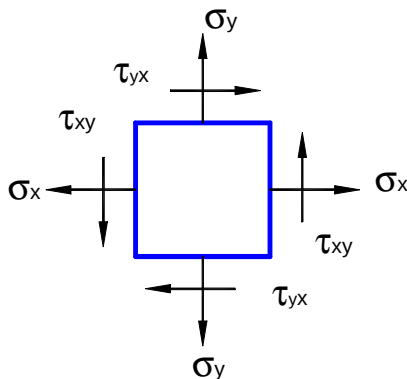


Figura 1 – Estado plano de tensões em um ponto

A este estado plano de tensões está associado um estado plano de deformações, como mostra a figura 2.

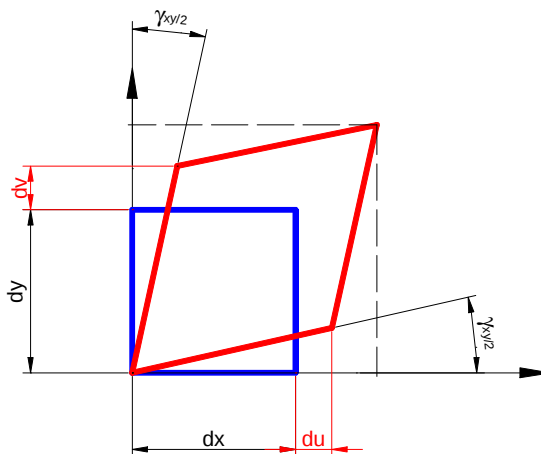


Figura 2 – Estado plano de deformações

Note-se que na direção x ocorrem deslocamentos (du) e na direção y (dv). Com estes deslocamentos é possível

determinar as deformações que ocorrem no ponto:

ϵ_x – deformação na direção x →

$$\epsilon_x = \frac{du}{dx} \quad (1)$$

ϵ_y – deformação na direção y →

$$\epsilon_y = \frac{dv}{dy} \quad (2)$$

γ_{xy} – distorção no plano xy

$$\rightarrow \gamma_{xy} = \frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx} \quad (3)$$

OBS:

Para um sólido de dimensões finitas x, y e z, os deslocamentos no plano x,y são u e v. Desta forma as deformações em x e y podem ser escritas da mesma maneira que o foram nas expressões 1, 2 e 3.

As relações entre as tensões e as deformações existentes no ponto são dadas pela Lei de Hooke; assim, é possível escrever:

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \times \sigma_y) \quad (4)$$

$$\epsilon_y = \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu \times \sigma_x) \quad (5)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{2(1+\nu)}{E} \times \tau_{xy} \quad (6)$$

onde :

E = módulo de elasticidade do material

ν = coeficiente de Poisson

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

OBS:

Para o estado triplo de tensão, existe, também, a deformação em z e a distorção nos planos xz e yz .

$$\varepsilon_z = \frac{dw}{dz} \quad (7)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{du}{dz} + \frac{dw}{dx} \quad (8)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{dw}{dy} + \frac{dv}{dz} \quad (9)$$

onde, dw é o deslocamento na direção z .

As expressões da Lei de Hooke ficam:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)) \quad (10)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)) \quad (11)$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} (\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)) \quad (12)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{2(1+\nu)}{E} \times \tau_{xy} \quad (13)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{2(1+\nu)}{E} \times \tau_{xz} \quad (14)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{2(1+\nu)}{E} \times \tau_{yz} \quad (15)$$

Quando se tem um ponto inclinado de um ângulo θ em relação à direção x , como mostra a figura 3, é possível escrever:

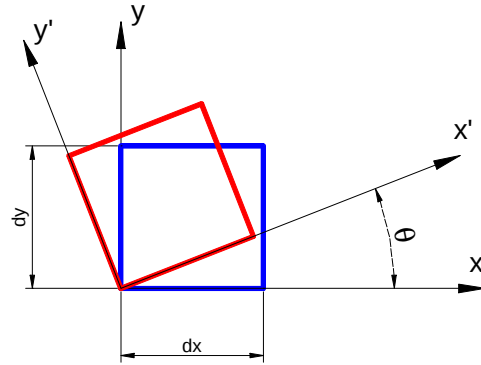


Figura 3 – Inclinação de um ângulo θ .

$$\varepsilon_{x'} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \cos 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2} \sin 2\theta \quad (16)$$

$$\frac{\gamma_{x'y'}}{2} = \frac{\varepsilon_y - \varepsilon_x}{2} \sin 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2} \cos 2\theta \quad (17)$$

As deformações principais são dadas por:

$$\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2} \quad (18)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2} \quad (19)$$

$$\tan 2\theta_1 = \frac{\gamma_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y} \quad (20)$$

onde θ_1 é o ângulo entre a direção x e a direção de ε_1 .

No plano, em estudo, a distorção máxima, ocorre a 45° da direção de ε_1 e vale:

$$\frac{\gamma_{\max}}{2} = \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2} \quad (21)$$

Exemplo:

1. Um ponto está sujeito a um estado plano de tensões que lhe desenvolve as deformações:

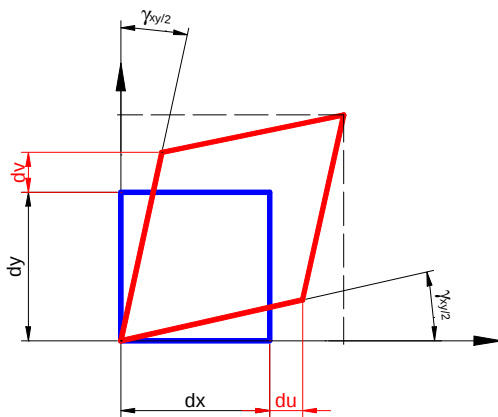
$$\varepsilon_x = 500 \times 10^{-6}$$

$$\varepsilon_y = -300 \times 10^{-6}$$

$$\gamma_{xy} = 200 \times 10^{-6}$$

conforme é mostrado na figura. Para esta situação, determinar:

- As deformações equivalentes para este ponto orientado a 30° no sentido horário.
- As deformações principais e suas direções.
- A distorção máxima.



Solução:

Para o sentido horário o ângulo é negativo; assim, $\theta = -30^\circ$.

a-

$$\varepsilon_{x'} = \left[\frac{500 + (-300)}{2} + \frac{500 - (-300)}{2} \cos(-60) + \frac{200}{2} \sin(-60) \right] \times 10^{-6}$$

$$\varepsilon_{x'} = 213 \times 10^{-6}$$

$$\frac{\gamma_{x'y'}}{2} = \left[\frac{-300 - 500}{2} \sin(-60) + \frac{200}{2} \cos(-60) \right] \times 10^{-6}$$

$$\gamma_{x'y'} = -793 \times 10^{-6}$$

Lembrando que $\varepsilon_x + \varepsilon_y = \varepsilon_{x'} + \varepsilon_{y'}$ se obtém:

$$\varepsilon_{y'} = -13 \times 10^{-6}$$

b-

$$\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2} \right)^2} \rightarrow$$

$$\varepsilon_1 = \left[\frac{500 + (-300)}{2} + \sqrt{\left(\frac{500 - (-300)}{2} \right)^2 + \left(\frac{200}{2} \right)^2} \right] \times 10^{-6}$$

$$\rightarrow \varepsilon_1 = 512 \times 10^{-6}$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2} \right)^2} \rightarrow$$

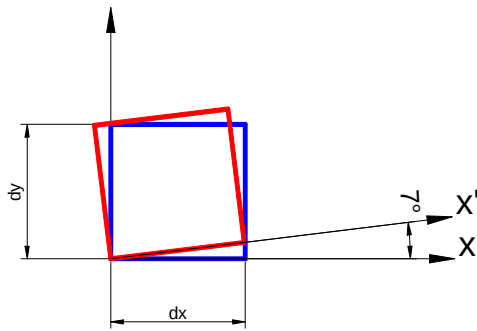
$$\varepsilon_2 = \left[\frac{500 + (-300)}{2} - \sqrt{\left(\frac{500 - (-300)}{2} \right)^2 + \left(\frac{200}{2} \right)^2} \right] \times 10^{-6}$$

$$\rightarrow \varepsilon_2 = -312 \times 10^{-6}$$

$$\tan 2\theta_1 = \frac{\gamma_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y} \rightarrow$$

$$\tan 2\theta_1 = \frac{200}{500 - (-300)} \rightarrow$$

$$\theta_1 = 7^\circ$$



c-

$$\frac{\gamma_{\max}}{2} = \sqrt{\left(\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2} \rightarrow$$

$$\frac{\gamma_{\max}}{2} = \left[\sqrt{\left(\frac{500 - (-300)}{2}\right)^2 + \left(\frac{200}{2}\right)^2} \right] \times 10^{-6}$$

$$\gamma_{\max} = 824 \times 10^{-6}$$

Exemplo:

2. Um ponto está sujeito a um estado plano de tensões que lhe desenvolve as deformações medidas pelos extensômetros, montados como mostra a figura, que são:

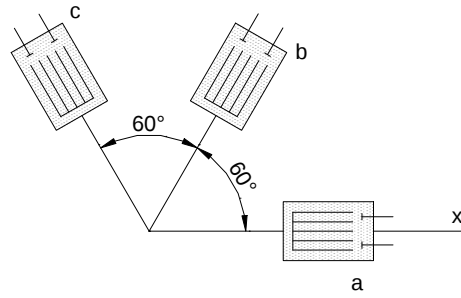
$$\epsilon_a = 60 \times 10^{-6}$$

$$\epsilon_b = 135 \times 10^{-6}$$

$$\epsilon_c = 264 \times 10^{-6}$$

Determinar:

- As deformações principais e as direções em que elas atuam.
- As tensões principais.

Dados: $E = 206 \text{ GPa}$ e $\nu = 0,3$

Solução:

a.

De acordo com a expressão 16:

$$\epsilon_{x'} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} + \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2} \cos 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2} \sin 2\theta$$

$$135 \times 10^{-6} = \frac{60 \times 10^{-6} + \epsilon_y}{2} + \frac{60 \times 10^{-6} - \epsilon_y}{2} \cos 120^\circ + \frac{\gamma_{xy}}{2} \sin 120^\circ$$

$$135 \times 10^{-6} = \frac{60 \times 10^{-6} + \epsilon_y}{2} + \frac{60 \times 10^{-6} - \epsilon_y}{2} (-0,5) + \frac{\gamma_{xy}}{2} (0,87)$$

$$270 \times 10^{-6} = 60 \times 10^{-6} + \epsilon_y + (60 \times 10^{-6} - \epsilon_y)(-0,5) + \gamma_{xy}(0,87)$$

$$240 \times 10^{-6} = 1,5 \times \epsilon_y + \gamma_{xy}(0,87)$$

Ainda pela mesma expressão:

$$264 \times 10^{-6} = \frac{60 \times 10^{-6} + \epsilon_y}{2} + \frac{60 \times 10^{-6} - \epsilon_y}{2} \cos 240^\circ + \frac{\gamma_{xy}}{2} \sin 240^\circ$$

$$264 \times 10^{-6} = \frac{60 \times 10^{-6} + \epsilon_y}{2} + \frac{60 \times 10^{-6} - \epsilon_y}{2} (-0,5) + \frac{\gamma_{xy}}{2} (-0,87)$$

$$498 \times 10^{-6} = 1,5 \times \epsilon_y - \gamma_{xy}(0,87)$$

Com isto temos:

$$738 \times 10^{-6} = 3 \times \varepsilon_y \rightarrow$$

$$\varepsilon_y = 246 \times 10^{-6}$$

$$\gamma_{xy} = -149 \times 10^{-6}$$

Por meio das expressões 18 e 19 encontramos as tensões principais:

$$\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2} \rightarrow$$

$$\varepsilon_1 = \left(\frac{60 + 246}{2} + \sqrt{\left(\frac{60 - 246}{2}\right)^2 + \left(\frac{-149}{2}\right)^2} \right) \times 10^{-6}$$

$$\rightarrow \varepsilon_1 = 272 \times 10^{-6}$$

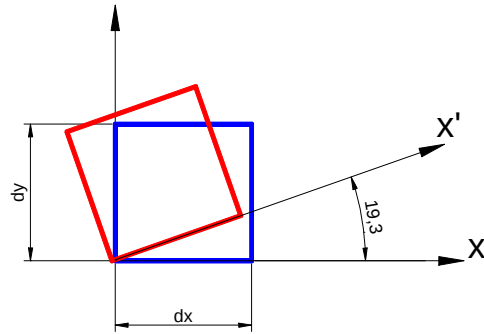
$$\varepsilon_2 = \left(\frac{60 + 246}{2} - \sqrt{\left(\frac{60 - 246}{2}\right)^2 + \left(\frac{-149}{2}\right)^2} \right) \times 10^{-6}$$

$$\rightarrow \varepsilon_2 = 33,8 \times 10^{-6}$$

$$\operatorname{tg} 2\theta_1 = \frac{\gamma_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y} \rightarrow$$

$$\operatorname{tg} 2\theta_1 = \frac{-149}{60 - (246)} \rightarrow$$

$$\theta_1 = 19,3^\circ$$



b.

Para determinar as tensões principais faremos uso das expressões 4 e 5.

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} (\sigma_1 + \nu \times \sigma_2) \quad (4)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E} (\sigma_2 + \nu \times \sigma_1) \quad (5)$$

Da expressão 4 é possível escrever: $E\varepsilon_1 + \nu \times \sigma_2 = \sigma_1$ que substituída na expressão 5 se encontra:

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E} (\sigma_2 - \nu \times (E\varepsilon_1 + \nu \times \sigma_2)) \rightarrow$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E} (\sigma_2 - \nu \times E\varepsilon_1 - \nu^2 \times \sigma_2)$$

$$\rightarrow E\varepsilon_2 = \sigma_2 - \nu \times E\varepsilon_1 - \nu^2 \times \sigma_2 \rightarrow$$

$$E\varepsilon_2 = \sigma_2 (1 - \nu^2) - \nu \times E\varepsilon_1$$

$$\rightarrow E\varepsilon_2 + \nu \times E\varepsilon_1 = \sigma_2 (1 - \nu^2) \rightarrow$$

$$\sigma_2 = \frac{E\varepsilon_2 + \nu \times E\varepsilon_1}{1 - \nu^2} \quad (22)$$

$$\sigma_1 = \frac{E\varepsilon_1 + \nu \times E\varepsilon_2}{1 - \nu^2} \quad (23)$$

$$\sigma_2 = \frac{E\varepsilon_2 + \nu \times E\varepsilon_1}{1 - \nu^2} = \frac{206 \times 10^3 \text{ MPa} \times 33,8 \times 10^{-6} + 0,3 \times 206 \times 10^3 \text{ MPa} \times 272 \times 10^{-6}}{1 - 0,3^2}$$

$$\sigma_2 = 26,2 \text{ MPa}$$

$$\sigma_1 = \frac{E\varepsilon_2 + \nu \times E\varepsilon_1}{1 - \nu^2} = \frac{206 \times 10^3 \text{ MPa} \times 272 \times 10^{-6} + 0,3 \times 206 \times 10^3 \text{ MPa} \times 33,8 \times 10^{-6}}{1 - 0,3^2}$$

$$\sigma_1 = 63,9 \text{ MPa}$$

Lista 4

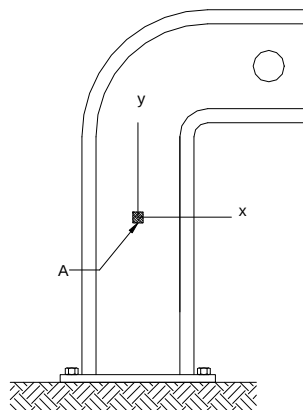
1. As componentes da deformação no ponto A do suporte mostrado na figura, valem:

$$\varepsilon_x = 300 \times 10^{-6}$$

$$\varepsilon_y = 550 \times 10^{-6}$$

$$\gamma_{xy} = -650 \times 10^{-6}$$

Determine as deformações principais no ponto A e a deformação por cisalhamento máxima.



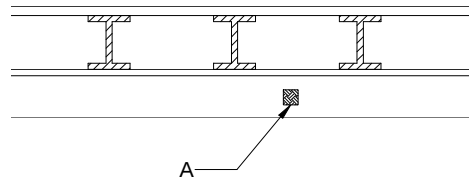
2. As componentes da deformação no ponto A da viga da figura valem:

$$\varepsilon_x = 450 \times 10^{-6}$$

$$\varepsilon_y = 825 \times 10^{-6}$$

$$\gamma_{xy} = 275 \times 10^{-6}$$

Determinar as deformações principais e a deformação por cisalhamento máxima.



3. As componentes das deformações em um vaso de pressão são:

$$\varepsilon_x = 480 \times 10^{-6}$$

$$\varepsilon_y = 720 \times 10^{-6}$$

$$\gamma_{xy} = 650 \times 10^{-6}$$

Determinar as deformações principais, a deformação por cisalhamento máxima e as tensões principais quando se sabe que o material do vaso possui $E = 206 \text{ GPa}$ e $\nu = 0,3$.

4. Uma barra de aço, que possui seção retangular, está sujeita a uma força normal de tração de 5kN. Sabendo-se que a barra tem 25mm de altura e 12mm de espessura, Determinar a deformação máxima por cisalhamento.

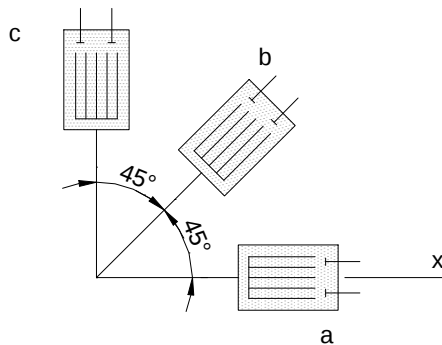
5. A roseta retangular, mostrada na figura, é montada na superfície de um componente de uma máquina. As seguintes leituras foram efetuadas:

$$\varepsilon_a = 650 \times 10^{-6}$$

$$\varepsilon_b = -300 \times 10^{-6}$$

$$\varepsilon_c = 480 \times 10^{-6}$$

Determinar: as deformações principais, a deformação por cisalhamento máxima e as tensões principais com suas direções, quando se sabe que o material possui $E = 206 \text{ GPa}$ e $\nu = 0,3$.



$$\varepsilon_1 = 1434 \times 10^{-6}$$

Resposta - $\varepsilon_2 = -304 \times 10^{-6}$

$$\theta_1 = -42,2^\circ$$

$$\sigma_1 = 304 \text{ MPa}$$

$$\sigma_2 = 28,6 \text{ MPa}$$

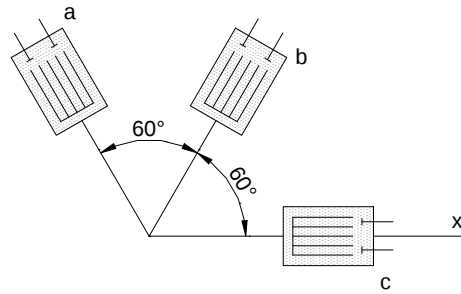
6. A roseta com ângulos de 60° mostrada na figura, é montada na superfície de uma viga. As seguintes leituras foram feitas:

$$\varepsilon_a = 250 \times 10^{-6}$$

$$\varepsilon_b = -400 \times 10^{-6}$$

$$\varepsilon_c = 280 \times 10^{-6}$$

Determinar: as deformações principais e suas orientações, a deformação por cisalhamento máxima e as tensões principais quando se sabe que o material possui $E = 206 \text{ GPa}$ e $\nu = 0,3$.



$$\varepsilon_1 = 487,5 \times 10^{-6}$$

Resposta - $\varepsilon_2 = -400,5 \times 10^{-6}$

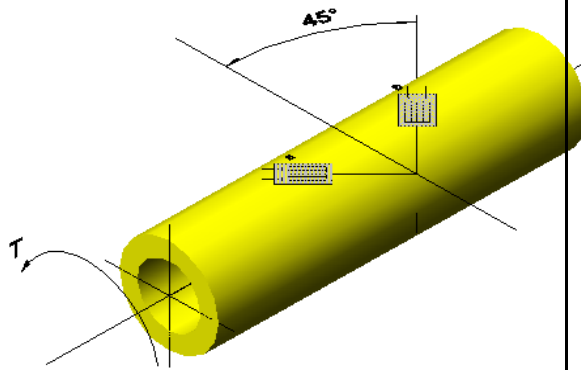
$$\theta_1 = -31^\circ$$

$$\sigma_1 = 83 \text{ MPa}$$

$$\sigma_2 = -58 \text{ MPa}$$

$$\gamma_{\text{máx}} = 888 \times 10^{-6}$$

7. Um eixo de seção em coroa circular, com 50mm de diâmetro externo e 30mm de diâmetro interno, está sujeito a um momento de torção T . Este eixo foi fabricado com um material que possui $E = 206 \text{ GPa}$ e $\nu = 0,3$. Foram montados dois extensômetros elétricos em sua superfície. Foi executada uma leitura de deformação no extensômetro **a** e se obteve 250×10^{-6} . A direção do extensômetro **a** está inclinada de 45° com o plano da seção transversal. O extensômetro **b**, por sua vez, está perpendicular ao extensômetro **a**. Determinar:
- O momento de torção que está sendo aplicado
 - A leitura que se obtém no extensômetro **b**.



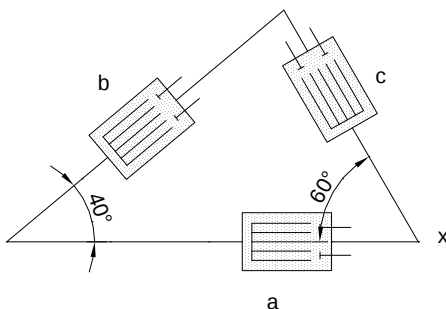
8. Para a roseta mostrada na figura, determinar a tensão na direção do extensômetro a.

$$\epsilon_a = 1100 \times 10^{-6}$$

$$\epsilon_b = 1496 \times 10^{-6}$$

$$\epsilon_c = -39,44 \times 10^{-6}$$

Dados $E = 206 \text{ GPa}$ e $\nu = 0,25$



Resposta $\sigma_x = 91,43 \text{ MPa}$

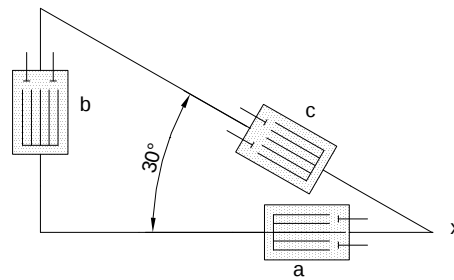
9. Para a roseta mostrada na figura, determinar as deformações e tensões principais, quando:

$$\epsilon_a = 1100 \times 10^{-6}$$

$$\epsilon_b = 200 \times 10^{-6}$$

$$\epsilon_c = 200 \times 10^{-6}$$

Dados $E = 41 \text{ GPa}$ $\nu = 0,35$



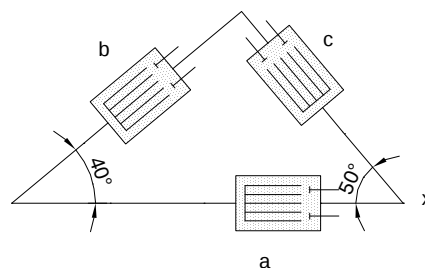
$$\epsilon_1 = 1550 \times 10^{-6}$$

Resposta - $\epsilon_2 = -250 \times 10^{-6}$

$$\sigma_1 = 68 \text{ MPa}$$

$$\sigma_2 = 14 \text{ MPa}$$

10. Em uma empresa, o monitoramento da pressão de uma vaso cilíndrico de paredes finas é feito por meio de três extensômetros que formam uma roseta, como a mostrada na figura.



Um estagiário foi incumbido de efetuar as leituras nos extensômetros que, segundo ele foram:

$$\epsilon_a = 1300 \times 10^{-6}$$

$$\epsilon_b = 1600 \times 10^{-6}$$

$$\epsilon_c = -50 \times 10^{-6}$$

O engenheiro responsável está desconfiado que as leituras não foram efetuadas e que o estagiário não está desempenhando o papel que dele se espera.

Assim que o engenheiro chefe recebeu os dados de leitura, este advertiu ao estagiário que se eles não representassem a verdade será dada solução de continuidade ao estágio.

Após a análise matemática dos dados de leitura, o estagiário foi desligado da empresa.

Pergunta-se:

- a. O engenheiro chefe tem razão em promover o desligamento do estagiário?
- b. Por quê?

Dados $E = 206 \text{ GPa}$ $\nu = 0,3$

Resposta

- a. Sim
- b. Pois, em um tubo de parede fina $\sigma_1 = 2 \times \sigma_2$ e não é este o resultado que as leituras mostram. O resultado que as leituras mostram é $\sigma_1 = 419 \text{ MPa}$ e $\sigma_2 = 94 \text{ MPa}$