

Flechas e deflexões

Seja uma barra reta, em equilíbrio, apoiada em suas extremidades, submetida a uma flexão normal. Esta barra fletida, deixa de ser reta assumindo uma forma, como a mostrada na figura 1.

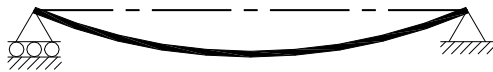


figura 1 – barra fletida

Note-se que as seções da barra sofreram deslocamentos na direção perpendicular ao eixo. Estes deslocamentos são conhecidos como flechas e indicados por v .

Note-se, também, que as seções, antes paralelas, agora ocupam uma posição inclinada em relação à posição inicial. À inclinação existente entre a posição final e a posição inicial da seção dá-se o nome de deflexão e indica-se por ϕ .

Como convenção de sinais, tem-se:

$v(+)$ para deslocamentos acima do eixo da barra

$v(-)$ para deslocamentos abaixo do eixo da barra

$\phi(+)$ para rotações com o sentido horário

$\phi(-)$ para rotações com o sentido anti-horário

A flecha e o ângulo de deflexão de uma seção dependem da posição que esta seção ocupa na barra. A figura 2 mostra as flechas e

as deflexões de duas seções justapostas na barra.

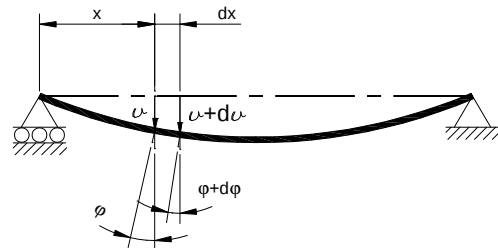


figura 2 – flechas e deflexões em duas seções justapostas.

Estas seções possuem flechas e deflexões diferentes. Note-se que as seções, que antes eram paralelas agora, são inclinadas por um ângulo $-d\phi$. Isto pode ser observado na figura 3.

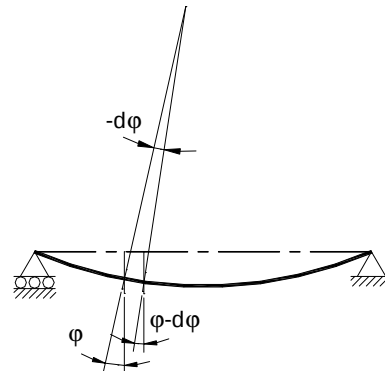


figura 3 – inclinação entre duas seções justapostas.

Quando se superpõe a posição inicial e a posição final destas seções verifica-se que o retângulo formado pelas seções se transforma em um trapézio, como pode ser observado na figura 4.

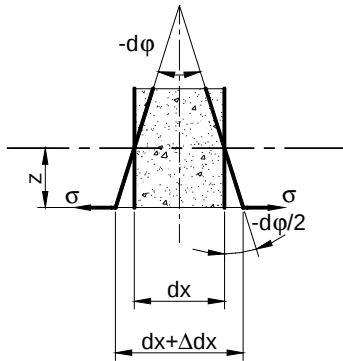


figura 4 – posições relativas das seções.

Em uma flexão normal, para os pontos que estão a uma cota z do eixo y (eixo em torno do qual a seção “gira”), a tensão normal fica:

$$\sigma = \frac{M}{I_y} z \quad (1)$$

Associada a esta tensão normal está uma variação de distância entre os pontos correspondentes das duas seções justapostas (Δdx). Assim, a deformação pode ser escrita:

$$\varepsilon = \frac{\Delta dx}{dx} \quad (2)$$

Dentro do regime elástico é possível escrever:

$$\sigma = E \times \varepsilon \quad (3)$$

Substituindo as expressões 1 e 2 na expressão 3, tem-se:

$$\frac{M}{I_y} z = E \times \frac{\Delta dx}{dx} \quad (4)$$

Pela figura 4 é possível observar que:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{-d\phi}{2}\right) = \frac{\frac{\Delta dx}{2}}{z} \quad (5)$$

Como se trata de deformações dentro do regime elástico, a deformação é muito pequena, ou seja:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{-d\phi}{2}\right) \approx \frac{-d\phi}{2}$$

Assim, é possível escrever:

$$\frac{-d\phi}{2} = \frac{\Delta dx}{2z} \rightarrow$$

$$-d\phi = \frac{\Delta dx}{z} \rightarrow$$

$$\Delta dx = -z \times d\phi \quad (6)$$

Com a expressão 6, a expressão 4 pode ser escrita como:

$$\frac{M}{I_y} z = E \times \frac{-z \times d\phi}{dx} \rightarrow$$

$$\frac{M}{E \times I_y} = \frac{-d\phi}{dx}$$

$$\boxed{\frac{d\phi}{dx} = -\frac{M}{E \times I_y}} \quad (7)$$

A expressão 7 pode ser escrita na forma integral que fica:

$$\boxed{\phi = \int -\frac{M}{E \times I_y} dx} \quad (8)$$

A figura 5 mostra a relação entre a diferença de flechas nas seções justapostas e o ângulo de deflexão.

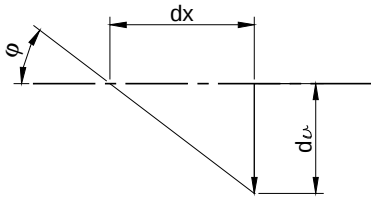


figura 5 – diferenças de flechas entre as seções justapostas.

Pela figura 5 é possível escrever:

$$\operatorname{tg}(\varphi) = \frac{dv}{dx} \approx \varphi \quad (9)$$

A expressão 9 pode ser escrita na forma integral que fica:

$$v = \int \varphi dx \quad (10)$$

Com as expressões 7 e 9 se obtém a **Equação da Linha Elástica**:

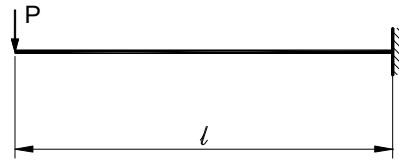
$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{d\varphi}{dx} = -\frac{M}{E \times I_y} \quad (11)$$

Observa-se aqui que as flechas e as deflexões podem ser obtidas a partir da integração da função momento fletor que atua nas seções da barra.

A seguir, serão apresentados alguns exemplos de determinação destas deformações e destes deslocamentos.

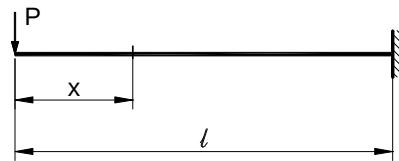
Exemplo 1

Determinar a flecha e o ângulo de deflexão na extremidade livre da barra quando se sabe que E e I são constantes.



solução

A função momento em uma seção qualquer da barra fica:



$$M = -Px$$

Aplicando-se a expressão 8 vem:

$$\varphi = \int -\frac{M}{EI} dx = \int -\frac{-Px}{EI} dx$$

$$\varphi = \frac{P}{EI} \int x dx$$

$$\varphi = \frac{Px^2}{2EI} + C_1 \quad (12)$$

Usando-se a expressão 10 se encontra:

$$v = \int \varphi dx = \int \left(\frac{Px^2}{2EI} + C_1 \right) dx$$

$$v = \frac{Px^3}{6EI} + C_1x + C_2 \quad (13)$$

As constantes de integração que aparecem nas expressões 12 e 13 são determinadas pelas condições de contorno, isto é, pelas restrições de movimento impostas pelos apoios.

No presente exemplo, nota-se que na posição de engastamento a flecha e o ângulo de deflexão devem ser nulos; ou seja:

$$\text{para } x = \ell \Rightarrow \varphi = 0$$

$$\text{para } x = \ell \Rightarrow v = 0$$

Aplicando-se estas condições na expressão 12 tem-se:

$$0 = \frac{P\ell^2}{2EI} + C_1$$

$$C_1 = -\frac{P\ell^2}{2EI} \quad (14)$$

Aplicando-se estas condições na expressão 13 tem-se:

$$0 = \frac{P\ell^3}{6EI} + C_1\ell + C_2$$

$$0 = \frac{P\ell^3}{6EI} - \frac{P\ell^3}{2EI} + C_2$$

$$0 = -\frac{P\ell^3}{3EI} + C_2$$

$$C_2 = \frac{P\ell^3}{3EI} \quad (15)$$

Com os resultados encontrados nas expressões 14 e 15, as expressões que fornecem o ângulo de deflexão (12) e a flecha (13) ficam:

$$\varphi = \frac{Px^2}{2EI} - \frac{P\ell^2}{2EI}$$

$$\varphi = \frac{P}{2EI}(x^2 - \ell^2) \quad (16)$$

$$v = \frac{Px^3}{6EI} - \frac{P\ell^2}{2EI}x + \frac{P\ell^3}{3EI}$$

$$v = \frac{P}{6EI}(x^3 - 3\ell^2x + 2\ell^3) \quad (17)$$

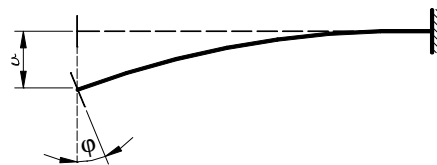
As expressões 16 e 17 fornecem o ângulo de deflexão e a flecha em qualquer seção da barra.

Na extremidade livre da barra, $x=0$. Assim, o ângulo de deflexão e a flecha nesta seção ficam:

$$\varphi = \frac{P}{2EI}(0 - \ell^2) \Rightarrow \varphi = -\frac{P\ell^2}{2EI} \quad (18)$$

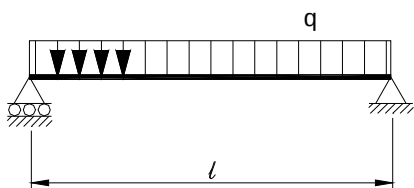
$$v = \frac{P}{6EI}(0 - 3\ell^2 \cdot 0 + 2\ell^3) \Rightarrow v = \frac{P\ell^3}{3EI} \quad (19)$$

Com estes resultados se observa que o deslocamento da seção é para baixo e que esta seção gira no sentido anti-horário a partir de sua posição inicial.



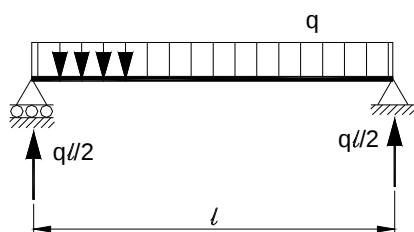
Exemplo 2

Determinar a flecha e o ângulo de deflexão na seção que se encontra na metade do comprimento da barra quando se sabe que E e I são constantes.

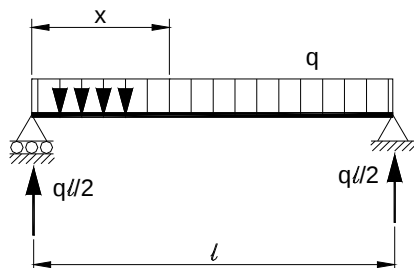


solução

Para determinar a função momento em uma seção qualquer da barra, é necessário determinar as reações de apoio. As reações de apoio são:



Com estas reações, a função momento para uma seção qualquer da barra fica:



$$M = \frac{q\ell}{2}x - \frac{qx^2}{2} \rightarrow$$

$$M = \frac{q}{2}(\ell x - x^2) \quad (20)$$

Aplicando-se a expressão 8 vem:

$$\varphi = \int -\frac{M}{EI} dx = \int -\left(\frac{q}{2EI}(\ell x - x^2)\right) dx$$

$$\varphi = \frac{q}{2EI} \int -(\ell x - x^2) dx$$

$$\varphi = \frac{q}{2EI} \left(\frac{x^3}{3} - \frac{\ell x^2}{2} \right) + C_1 \quad (21)$$

Usando-se a expressão 10 se encontra:

$$v = \int \left(\frac{q}{2EI} \left(\frac{x^3}{3} - \frac{\ell x^2}{2} \right) + C_1 \right) dx$$

$$v = \frac{q}{2EI} \left(\frac{x^4}{12} - \frac{\ell x^3}{6} \right) + C_1 x + C_2 \quad (22)$$

Para determinar as constantes de integração, nota-se que na posição dos apoios a flecha é igual a zero; ou seja:

$$\text{para } x = 0 \Rightarrow v = 0$$

$$\text{para } x = \ell \Rightarrow v = 0$$

Aplicando-se estas condições na expressão 22 se encontra:

$$0 = \frac{q}{2EI} (0 - 0) + C_1 \cdot 0 + C_2$$

$$0 = C_2 \quad (23)$$

$$0 = \frac{q}{2EI} \left(\frac{\ell^4}{12} - \frac{\ell^4}{6} \right) + C_1 \ell$$

$$0 = -\frac{q\ell^4}{24EI} + C_1 \ell$$

$$\frac{q\ell^3}{24EI} = C_1 \quad (24)$$

Com os resultados encontrados nas expressões 23 e 24, as expressões

que fornecem o ângulo de deflexão (21) e a flecha (22) ficam:

$$\varphi = \frac{q}{2EI} \left(\frac{x^3}{3} - \frac{\ell x^2}{2} \right) + \frac{q\ell^3}{24}$$

$$\varphi = \frac{q}{2EI} \left(\frac{x^3}{3} - \frac{\ell x^2}{2} + \frac{\ell^3}{12} \right) \quad (25)$$

$$v = \frac{q}{2EI} \left(\frac{x^4}{12} - \frac{\ell x^3}{6} \right) + \frac{q\ell^3}{24} x$$

$$v = \frac{q}{2EI} \left(\frac{x^4}{12} - \frac{\ell x^3}{6} + \frac{\ell^3}{12} x \right) \quad (26)$$

Para determinar o ângulo de deflexão e a flecha na metade do comprimento da barra, basta substituir x por $\ell/2$ nas expressões 25 e 26 respectivamente.

$$\varphi = \frac{q}{2EI} \left(\frac{\ell^3}{24} - \frac{\ell^3}{8} + \frac{\ell^3}{12} \right) \rightarrow$$

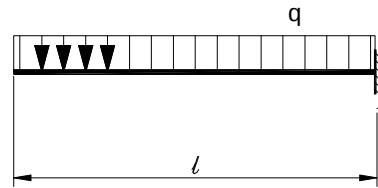
$$\boxed{\varphi = 0} \quad (27)$$

$$v = \frac{q}{2EI} \left(\frac{\ell^4}{192} - \frac{\ell^4}{48} + \frac{\ell^4}{24} \right) \rightarrow$$

$$\boxed{v = \frac{5q\ell^4}{384EI}} \quad (28)$$

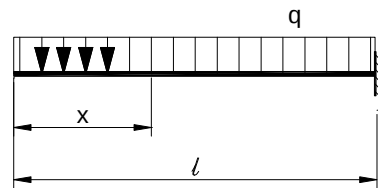
Exemplo 3

Determinar a flecha e o ângulo de deflexão na extremidade livre da barra quando se sabe que E e I são constantes.



solução

A função momento em uma seção qualquer da barra fica:



$$M = -\frac{qx^2}{2}$$

Aplicando-se a expressão 8 vem:

$$\varphi = \int -\frac{M}{EI} dx = \int -\frac{-qx^2}{2EI} dx$$

$$\varphi = \frac{q}{2EI} \int x^2 dx$$

$$\boxed{\varphi = \frac{qx^3}{6EI} + C_1} \quad (29)$$

Usando-se a expressão 10 se encontra:

$$v = \int \varphi dx = \int \left(\frac{qx^3}{6EI} + C_1 \right) dx$$

$$\boxed{v = \frac{qx^4}{24EI} + C_1 x + C_2} \quad (30)$$

Neste exemplo, assim como no primeiro, nota-se que na posição de engastamento a flecha e o ângulo de deflexão devem ser nulos; ou seja:

$$\text{para } x = \ell \Rightarrow \varphi = 0$$

$$\text{para } x = \ell \Rightarrow v = 0$$

Aplicando-se estas condições nas expressões 29 e 30 tem-se:

$$0 = \frac{q\ell^3}{6EI} + C_1$$

$$C_1 = -\frac{q\ell^3}{6EI} \quad (31)$$

$$0 = \frac{q\ell^4}{24EI} + C_1\ell + C_2$$

$$0 = \frac{q\ell^4}{24EI} - \frac{q\ell^4}{6EI} + C_2$$

$$C_2 = \frac{3q\ell^4}{24EI} \quad (32)$$

Com os resultados encontrados nas expressões 31 e 32, as expressões que fornecem o ângulo de deflexão (29) e a flecha (30) ficam:

$$\varphi = \frac{qx^3}{6EI} - \frac{q\ell^3}{6EI}$$

$$\varphi = \frac{q}{6EI} (x^3 - \ell^3) \quad (33)$$

$$v = \frac{qx^4}{24EI} - \frac{q\ell^3}{6EI}x + \frac{3q\ell^4}{24EI}$$

$$v = \frac{q}{24EI} (x^4 - 4\ell^3x + 3\ell^4) \quad (34)$$

As expressões 33 e 34 fornecem o ângulo de deflexão e a flecha em qualquer seção da barra.

Na extremidade livre da barra, $x=0$. Assim, o ângulo de deflexão e a flecha nesta seção ficam:

$$\varphi = 0 - \frac{q\ell^3}{6EI}$$

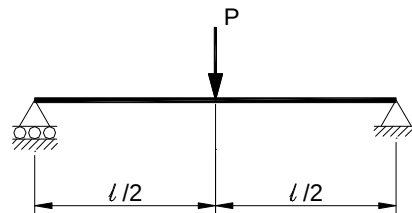
$$\varphi = -\frac{q\ell^3}{6EI} \quad (35)$$

$$v = 0 - 0 + \frac{3q\ell^4}{24EI}$$

$$v = \frac{3q\ell^4}{24EI} \quad (36)$$

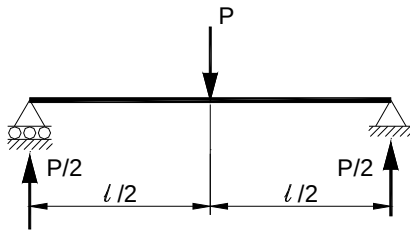
Exemplo 4

Determinar a flecha e o ângulo de deflexão na seção que se encontra na metade do comprimento da barra quando se sabe que E e I são constantes.

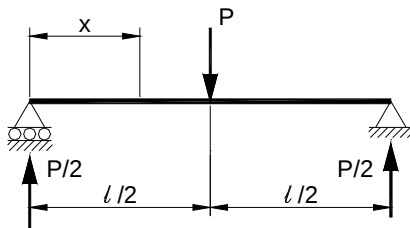


Solução

Para determinar a função momento em uma seção qualquer da barra, é necessário determinar as reações de apoio. As reações de apoio são:



Com estas reações, a função momento para uma seção qualquer da primeira metade da barra fica:



$$M = \frac{P}{2}x \quad (\text{para } 0 \leq x \leq \frac{\ell}{2})$$

Para a segunda metade da barra a função momento fica:

$$M = \frac{P}{2}(\ell - x) \quad (\text{para } \frac{\ell}{2} \leq x \leq \ell)$$

Note-se, então que se tem uma função para a primeira metade diferente da função da segunda metade.

Para a determinação do ângulo de deflexão e da flecha é necessário fazer a integração das funções dos dois trechos e de determinar as constantes de integração para elas.

Para o primeiro trecho se encontra:

$$\phi = \int -\frac{M}{EI} dx = \int -\frac{P}{2EI} x dx$$

$$\phi = -\frac{Px^2}{4EI} + C_1 \quad (37)$$

$$v = \int \phi dx = \int \left(-\frac{Px^2}{4EI} + C_1 \right) dx$$

$$v = -\frac{Px^3}{12EI} + C_1x + C_2 \quad (38)$$

Para o segundo trecho se encontra:

$$\phi = \int -\frac{M}{EI} dx = \int -\frac{P}{2EI} (\ell - x) dx$$

$$\phi = -\frac{P\ell x}{2EI} + \frac{Px^2}{4EI} + C_3 \quad (39)$$

$$v = \int \phi dx = \int \left(-\frac{P\ell x}{2EI} + \frac{Px^2}{4EI} + C_3 \right) dx$$

$$v = -\frac{P\ell x^2}{4EI} + \frac{Px^3}{12EI} + C_3x + C_4 \quad (40)$$

Para determinar as quatro constantes de integração são necessárias quatro condições de contorno. Nota-se que na posição dos apoios a flecha é igual a zero e que na posição de aplicação da carga a flecha e o ângulo de deflexão são os mesmos para os dois trechos da barra; ou seja:

$$\text{para } x = 0 \Rightarrow v = 0$$

$$\text{para } x = \ell \Rightarrow v = 0$$

$$\text{para } x = \frac{\ell}{2} \Rightarrow \phi_{(\text{primeiro trecho})} = \phi_{(\text{segundo trecho})}$$

$$\text{para } x = \frac{\ell}{2} \Rightarrow v_{(\text{primeiro trecho})} = v_{(\text{segundo trecho})}$$

Assim, se obtém:

Da expressão 38 vem:

$$0 = -\frac{P\ell^3}{12EI} + C_1\ell + C_2 \Rightarrow \boxed{C_2 = 0} \quad (41)$$

Da expressão 40 se obtém:

$$0 = -\frac{P\ell^3}{4EI} + \frac{P\ell^3}{12EI} + C_3\ell + C_4$$

$$0 = -\frac{P\ell^3}{6EI} + C_3\ell + C_4 \quad (42)$$

Igualando-se a expressão 37 e 39, se encontra:

$$-\frac{P\ell^2}{16EI} + C_1 = -\frac{P\ell^2}{4EI} + \frac{P\ell^2}{16EI} + C_3$$

$$\frac{P\ell^2}{8EI} + C_1 = C_3$$

$$C_1 = C_3 - \frac{P\ell^2}{8EI} \quad (43)$$

Igualando-se a expressão 38 e 40, se encontra:

$$-\frac{P\ell^3}{96EI} + C_1\frac{\ell}{2} + 0 = -\frac{P\ell^3}{16EI} + \frac{P\ell^3}{96EI} + C_3\frac{\ell}{2} + C_4$$

Substituindo-se o encontrado na expressão 43, tem-se:

$$\frac{P\ell^3}{24EI} + \left(C_3 - \frac{P\ell^2}{8EI}\right)\frac{\ell}{2} = C_3\frac{\ell}{2} + C_4$$

$$\boxed{-\frac{P\ell^3}{48EI} = C_4} \quad (44)$$

Voltando na expressão 42 e substituindo o encontrado em 44:

$$0 = -\frac{P\ell^3}{6EI} + C_3\ell - \frac{P\ell^3}{48EI}$$

$$0 = C_3\ell - \frac{9P\ell^3}{48EI}$$

$$\boxed{C_3 = \frac{9P\ell^2}{48EI}} \quad (45)$$

Com C_3 encontrado na expressão 45 é possível obter C_1 por meio da expressão 43. Assim:

$$C_1 = \frac{9P\ell^2}{48EI} - \frac{P\ell^2}{8EI}$$

$$\boxed{C_1 = \frac{P\ell^2}{16EI}} \quad (46)$$

Com o valor de C_1 , encontrado na expressão 46 e de C_2 , encontrado na expressão 41, as funções para o ângulo de deflexão e a flecha para o trecho $0 \leq x \leq \frac{\ell}{2}$ ficam:

$$\boxed{\varphi = -\frac{Px^2}{4EI} + \frac{P\ell^2}{16EI}} \quad (47)$$

$$\boxed{v = -\frac{Px^3}{12EI} + \frac{P\ell^2}{16EI}x} \quad (48)$$

No ponto de aplicação da força P , que é a metade do comprimento da barra, isto é $x = \frac{\ell}{2}$, o ângulo de deflexão e a flecha ficam:

$$\varphi = -\frac{P\left(\frac{\ell}{2}\right)^2}{4EI} + \frac{P\ell^2}{16EI}$$

$$\varphi = -\frac{P\ell^2}{16EI} + \frac{P\ell^2}{16EI}$$

$$\varphi = 0$$

$$v = -\frac{P\left(\frac{\ell}{2}\right)^3}{12EI} + \frac{P\ell^2}{16EI} \frac{\ell}{2}$$

$$v = -\frac{P\ell^3}{96EI} + \frac{P\ell^3}{32EI}$$

$$v = \frac{P\ell^3}{48EI}$$

Exercícios

Usando as integrações, determinar para as barras prismáticas abaixo, que possuem EI constante ao longo de seu comprimento, a flecha máxima e o ponto onde ela ocorre.

