

Analogia de Mohr

A analogia de Mohr se baseia no fato que a equação da linha elástica e a equação do relacionamento entre a carga aplicada, a força cortante e o momento fletor possuem a mesma forma.

A expressão 1 é a equação da linha elástica e a expressão 2 é a relação entre carga aplicada, força cortante e Momento fletor.

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{d\phi}{dx} = -\frac{M}{E \times I_y} \quad (1)$$

$$\frac{d^2M}{dx^2} = \frac{dV}{dx} = -q \quad (2)$$

onde q é uma carga distribuída em um trecho.

Desta forma, ao imaginar que a relação $\frac{M}{E \times I_y}$ seja uma carga distribuída em um trecho de barra, a força cortante em uma seção, oriunda desta carga, nada mais é do que o ângulo de deflexão nesta seção. Da mesma maneira, o momento fletor em uma seção é igual à flecha que nela ocorre.

$$\begin{array}{ccc} \frac{d^2v}{dx^2} & = & \frac{d\phi}{dx} = -\frac{M}{E \times I_y} \\ \Downarrow & & \Downarrow \quad \Downarrow \\ \frac{d^2M}{dx^2} & = & \frac{dV}{dx} = -q \end{array}$$

há de se lembrar, entretanto, que:

- a) O diagrama de momentos fletores é feito com sinal invertido.
- b) A força cortante e o momento fletor em uma seção dependem da carga distribuída no trecho e das condições de vínculo com o restante da estrutura.

Assim, para que determinar o ângulo de deflexão e a flecha em uma seção, usando esta analogia é necessário:

1. Determinar o diagrama de momentos fletores para a estrutura.
2. "Consertar" o sinal deste diagrama invertendo-o
3. Tomar cada valor de momento deste diagrama e dividi-lo por $E \times I$
4. Analisar as condições de vínculo da estrutura e determinar o que será chamado de **viga análoga**.
5. Carregar a viga análoga com o resultado do item 3.
6. Determinar as reações de apoio nesta viga análoga.
7. Na seção em que se deseja conhecer o ângulo de deflexão e a flecha, determinar a força cortante e o momento fletor.

Viga Análoga.

Para facilitar a visualização, tudo o que se relacionar com a viga análoga terá um asterisco (*) em sua representação.

A viga análoga é uma viga que respeita as condições de deslocamento da viga original.

Seja por exemplo uma barra prismática engastada em uma de suas extremidades, como mostra a figura 1.

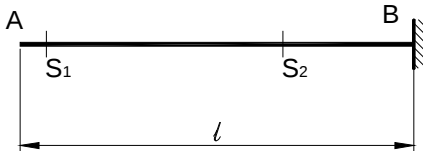


figura 1 – Barra engastada na extremidade direita.

Quando são analisadas as possibilidades de deslocamento, das extremidades da barra e dos pontos de apoio, se observa que

- Na seção A (extremidade da direita) pode existir qualquer que seja o deslocamento (flechas e ângulo de deflexão)
- Na seção B (extremidade da esquerda) não existe qualquer tipo de deslocamento, ou seja, independente da carga aplicada a flecha e o ângulo de deflexão são iguais a zero.

A viga análoga deve garantir que estes deslocamentos ocorram (ou não possam ocorrer).

Assim, lembrando que:

Viga Real	Viga Análoga
ϕ	V^*
ψ	M^*

A barra da figura 1 fica:

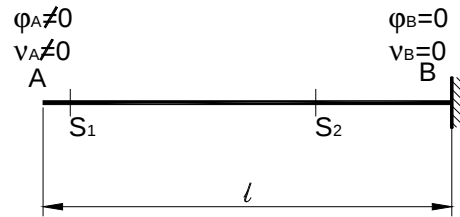


figura 2 – condições de deslocamento nas extremidades e nos pontos de apoio de uma barra engastada.

Ao se tomar a relação da analogia, se encontra:

Viga Real	Viga Análoga
$\phi_A \neq 0$	$V_A^* \neq 0$
$\psi_A \neq 0$	$M_A^* \neq 0$
$\phi_B = 0$	$V_B^* = 0$
$\psi_B = 0$	$M_B^* = 0$

Desta maneira, a viga análoga deve ser apoiada de maneira a garantir as forças cortantes e os momentos fletores nas seções A e B da viga análoga.

Desta forma, a viga análoga fica:

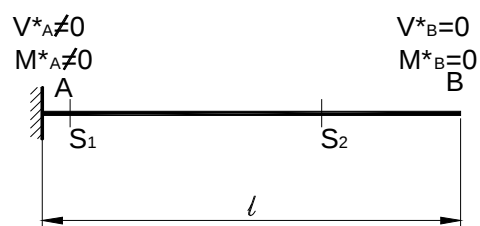


figura 3 – viga análoga para a barra da figura 2

Importante observar que na viga análoga, em relação à viga real é que existe **apenas** a mudança na forma de apoio. As posições das seções continuam as mesmas.

A figura 4 mostra algumas vigas análogas para barras:

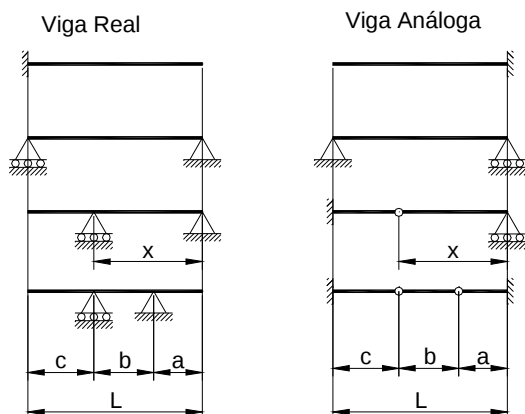
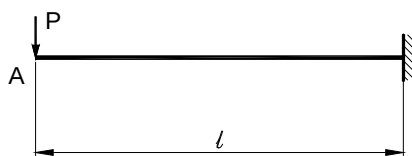


figura 4 – Exemplos de vigas análogas

Outro fato importante de se notar é que, caso uma viga real seja apoiada da maneira que a representada por uma das análogas da figura 4, a viga análoga para esta será apoiada da forma que a real desta, aqui representada.

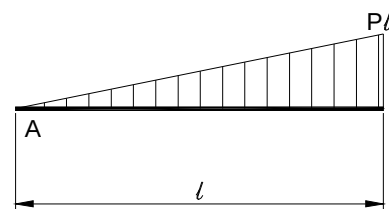
Exemplo 1

Determinar a flecha e o ângulo de deflexão na extremidade livre da barra quando se sabe que E e I são constantes.

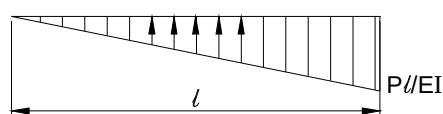


solução

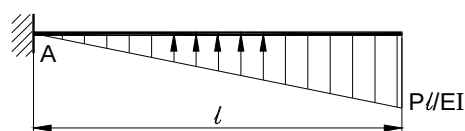
O diagrama de momentos fletores para esta barra fica:



A carga distribuída que será aplicada na viga análoga é:



A viga análoga carregada com a carga distribuída da figura anterior fica:



Assim, o ângulo de deflexão e a flecha na seção A (extremidade livre da barra real) ficam:

$$\phi_A = V_A^* = -\frac{1}{2} \times \frac{Pl}{EI} \times l \rightarrow$$

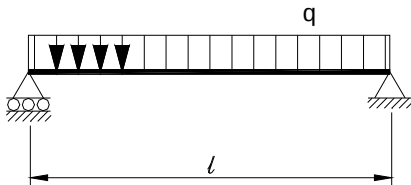
$$\phi_A = -\frac{Pl^2}{2EI} \quad (3)$$

$$v_A = M_A^* = \frac{1}{2} \times \frac{Pl}{EI} \times l \times \frac{2l}{3} \rightarrow$$

$$v_A = \frac{Pl^3}{3EI} \quad (4)$$

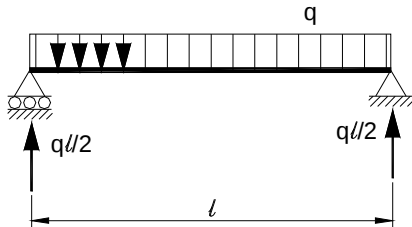
Exemplo 2

Determinar a flecha e o ângulo de deflexão na seção que se encontra na metade do comprimento da barra quando se sabe que E e I são constantes.

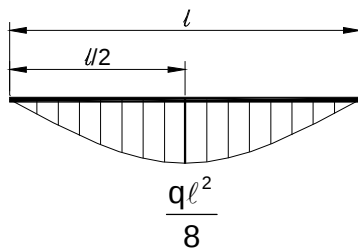


solução

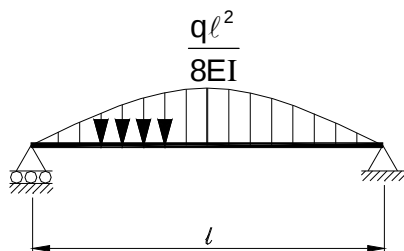
As reações de apoio são:



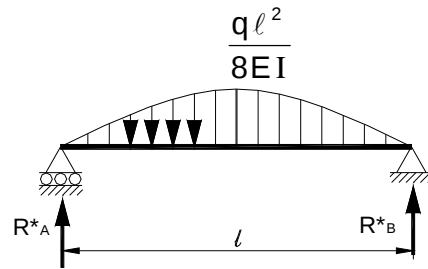
Com estas reações, O diagrama de momentos fletores fica:



A viga análoga carregada fica:



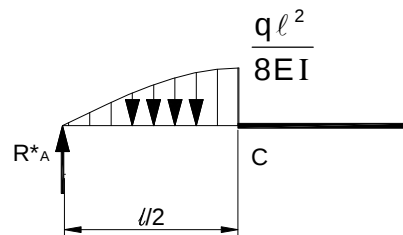
As reações de apoio para esta situação ficam:



$$R_A^* = R_B^* = \frac{2}{3} \times \frac{l}{2} \times \frac{q l^2}{8EI}$$

$$R_A^* = R_B^* = \frac{q l^3}{24EI}$$

Assim, o ângulo de deflexão e a flecha na seção que se encontra na metade do comprimento da barra ficam:



$$\phi_C = V_C^* = R_A^* - \frac{2}{3} \times \frac{l}{2} \times \frac{q l^2}{8EI}$$

$$\phi_C = V_C^* = \frac{q l^3}{24EI} - \frac{2}{3} \times \frac{l}{2} \times \frac{q l^2}{8EI}$$

$$\boxed{\phi_C = V_C^* = 0} \quad (5)$$

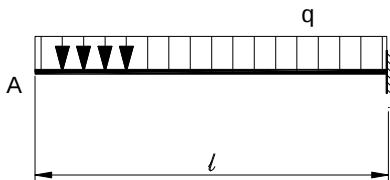
$$v_C = M_C^* = R_A^* \times \frac{l}{2} - \left(\frac{2}{3} \times \frac{l}{2} \times \frac{q l^2}{8EI} \right) \times \frac{3l}{8}$$

$$v_C = M_C^* = \frac{q\ell^3}{24EI} \times \frac{\ell}{2} - \left(\frac{2}{3} \times \frac{\ell}{2} \times \frac{q\ell^2}{8EI} \right) \times \frac{3\ell}{8}$$

$$v_C = M_C^* = \frac{5q\ell^4}{384EI} \quad (6)$$

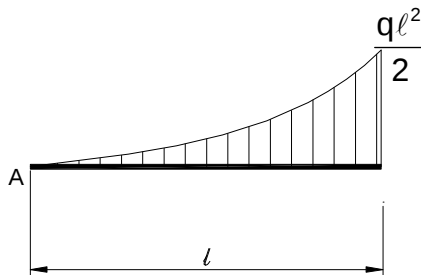
Exemplo 3

Determinar a flecha e o ângulo de deflexão na extremidade livre da barra quando se sabe que E e I são constantes.

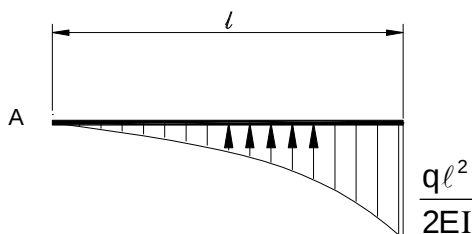


solução

O diagrama de momentos fletores para esta barra fica:



A viga análoga carregada fica:



Assim, o ângulo de deflexão e a flecha na seção A (extremidade livre da barra real) ficam:

$$\varphi_A = v_A^* = -\frac{1}{3} \times \ell \times \frac{q\ell^2}{2EI}$$

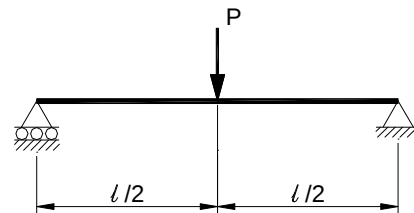
$$\varphi_A = -\frac{q\ell^3}{6EI} \quad (7)$$

$$v_A = M_A^* = \frac{q\ell^3}{6EI} \times \frac{3}{4} \ell$$

$$v_A = \frac{3q\ell^4}{24EI} \quad (8)$$

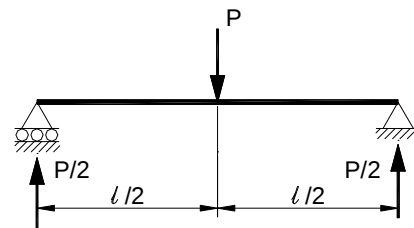
Exemplo 4

Determinar a flecha e o ângulo de deflexão na seção que se encontra na metade do comprimento da barra quando se sabe que E e I são constantes.

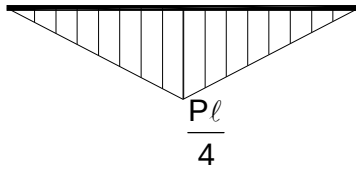


solução

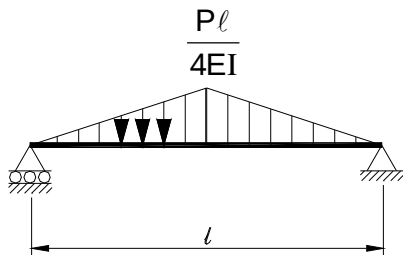
As reações de apoio são:



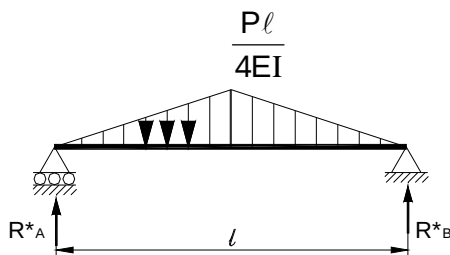
Com estas reações, o diagrama de momentos fletores fica:



A viga análoga carregada fica:



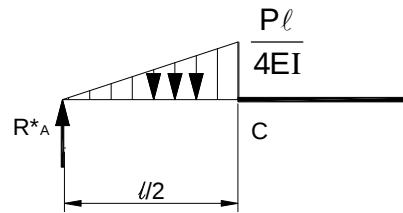
As reações de apoio para esta situação ficam:



$$R_A^* = R_B^* = \frac{1}{2} \times \frac{\ell}{2} \times \frac{P\ell}{4EI}$$

$$R_A^* = R_B^* = \frac{P\ell^2}{16EI}$$

Assim, o ângulo de deflexão e a flecha na seção que se encontra na metade do comprimento da barra ficam:



$$\phi_C = V_C^* = R_A^* - \frac{1}{2} \times \frac{\ell}{2} \times \frac{P\ell}{4EI}$$

$$\phi_C = V_C^* = \frac{P\ell^2}{16EI} - \frac{1}{2} \times \frac{\ell}{2} \times \frac{P\ell}{4EI}$$

$$\boxed{\phi_C = V_C^* = 0} \quad (9)$$

$$v_C = M_C^* = R_A^* \times \frac{\ell}{2} - \left(\frac{1}{2} \times \frac{\ell}{2} \times \frac{P\ell}{4EI} \right) \times \frac{1}{3} \times \frac{\ell}{2}$$

$$v_C = M_C^* = \frac{P\ell^2}{16EI} \times \frac{\ell}{2} - \left(\frac{1}{2} \times \frac{\ell}{2} \times \frac{P\ell}{4EI} \right) \times \frac{\ell}{6}$$

$$\boxed{v_C = M_C^* = \frac{P\ell^3}{48EI}} \quad (10)$$

Exercícios

Usando a analogia de Mohr, determinar a flecha na seção S indicada na figura, quando se sabe que EI são constantes e valem:

$$E = 200 \text{ GPa} \quad I = 3 \times 10^7 \text{ mm}^4$$

