

Torção

O estudo deste capítulo será dividido em duas partes:

- 1) A torção de barras circulares
- 2) A torção de barras não circulares.

TORÇÃO DE BARRAS CIRCULARES

Seja uma barra circular com diâmetro " d " e comprimento " ℓ ", solicitada por um momento de torção " T ", como mostra a figura 1.

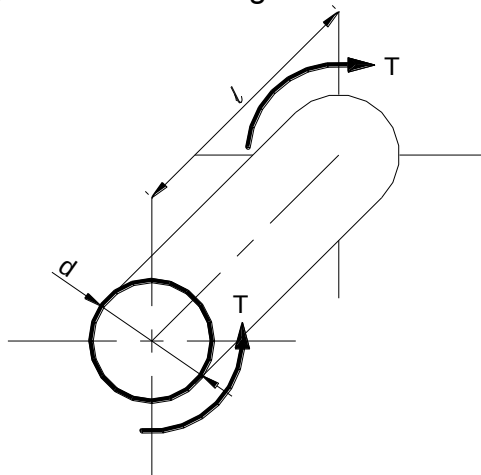


Figura 1 – barra de seção circular solicitada por um momento de torção

Observa-se que ocorre uma rotação entre as seções limitantes do trecho. Ao ângulo desta rotação dá-se o nome de ângulo de deformação por torção e se indica por θ .

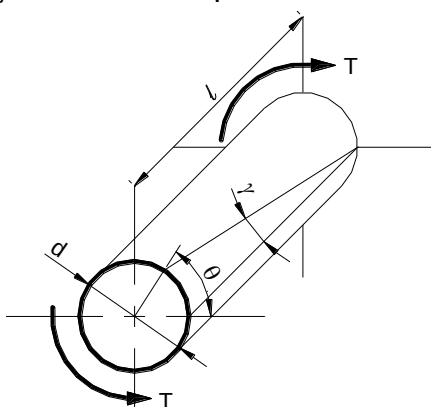


Figura 2 – Ângulo de deformação por torção

Observa-se, ainda, na figura 2 a formação de uma hélice pelas linhas paralelas ao eixo da barra. O ângulo de hélice em cada ponto é indicado por γ e é chamado de distorção.

Para determinar as tensões desenvolvidas e as deformações correspondentes, toma-se um infinitésimo de comprimento de barra " dx ", como o da figura 3.

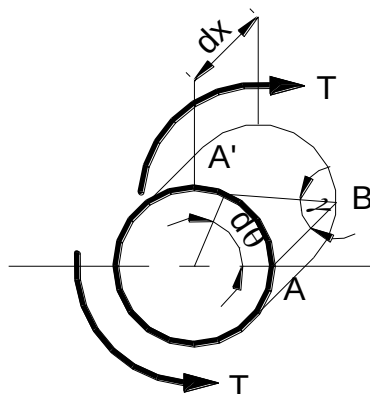


Figura 3 – Elemento de barra cilíndrica, solicitada por um momento de torção

Tensões de Cisalhamento

Note-se que o ponto A tem o deslocamento A-A'. Para que este deslocamento ocorra, é necessário que nele atue uma tensão de cisalhamento como a mostrada na figura 4

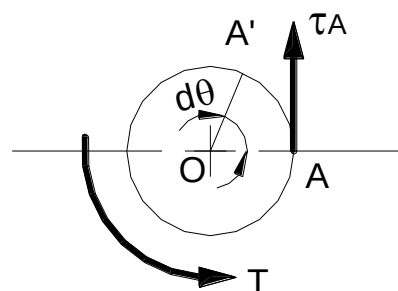


Figura 4 – Tensão de cisalhamento no ponto A

Observa-se que esta tensão tem direção perpendicular à linha que une o ponto A ao centro de gravidade da

seção.

Deve-se observar, também, que a existência do equilíbrio, implica em que o conjunto dos momentos das tensões de cisalhamento, em relação ao centro de gravidade da seção, deve ser igual ao momento de torção nela existente. Assim, é possível escrever:

$$T = \int_A (\tau \times R) d_A \quad (1)$$

onde R é distância entre o ponto e o centro de gravidade da seção.

Note-se, ainda, na figura 4, que; a condição necessária para que a linha **O-A'** permaneça reta, como é a linha **O-A**, repousa na proporção entre os deslocamentos dos pontos desta linha. Assim, os deslocamentos devem ser proporcionais à distância entre o ponto e o centro de gravidade da seção. A figura 5 mostra esta relação.

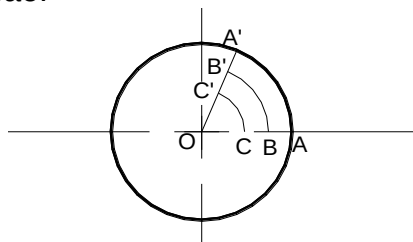


Figura 5 – proporção entre os deslocamentos

Dentro da validade da Lei de Hooke, as tensões são proporcionais às deformações. Assim, é possível concluir que as tensões são proporcionais às distâncias entre os pontos e o centro de gravidade.

$$\frac{\tau_A}{\tau_B} = \frac{R_A}{R_B} \quad (2)$$

Pode-se então escrever:

Universidade Santa Cecília
Engenharia Mecânica e de Produção
Resistência dos Materiais

$$\frac{\tau_A}{R_A} = \frac{\tau_B}{R_B} = \frac{\tau}{R} = \text{constante} \quad (3)$$

Aplicando-se esta relação na expressão 1, se obtém:

$$T = \int_A (\tau \times R) d_A \times \frac{R}{R} \rightarrow$$

$$T = \int_A \left(\frac{\tau}{R} \times R^2 \right) d_A \rightarrow$$

$$T = \frac{\tau}{R} \int_A R^2 d_A \quad (4)$$

Na expressão 4, a integral $\int_A R^2 d_A$ nada mais é do que o momento polar de inércia da seção em relação a seu centro de gravidade.

Neste capítulo esta integral será chamada de Momento Polar de Inércia à torção e indicada por I_t .

$$I_t = \int_A R^2 d_A \quad (5)$$

Obtém-se, então:

$$T = \frac{\tau}{R} \times I_t \rightarrow$$

$$\tau = \frac{T}{I_t} \times R \quad (6)$$

A expressão 6 mostra que a tensão de cisalhamento que ocorre no ponto é proporcional à sua distância ao centro de gravidade. Sendo assim, é possível concluir que a máxima tensão de cisalhamento irá ocorrer nos pontos mais afastados deste ponto, isto é, nos pontos do perímetro da seção.

Desta forma, é possível escrever:

$$\max\{\tau\} = \frac{T}{\frac{I_t}{R_{\max}}} \quad (7)$$

Na expressão 7, o quociente $\frac{I_t}{R_{\max}}$, é uma propriedade da área da seção transversal. Ele será chamado de Módulo de Resistência à torção e indicado por W_t . Assim,

$$\max\{\tau\} = \frac{T}{W_t} \quad (8)$$

Não se deve esquecer que o dimensionamento é feito por meio da limitação da máxima tensão de cisalhamento ao valor da tensão admissível ao cisalhamento, isto é:

$$\max\{\tau\} = \frac{T}{W_t} \leq \bar{\tau} \quad (9)$$

Ângulo de deformação por torção

Na figura 3, ainda é possível observar que o deslocamento $A-A'$, pode ser determinado de duas maneiras:

$$\begin{aligned} A - A' &= R \times d\theta \\ A - A' &\approx \gamma \times dx \end{aligned} \quad (10)$$

Importante se faz lembrar que o ângulo γ , para o elemento dx considerado, sofrerá alteração quando existir alteração na tensão desenvolvida ou a barra for construída

Universidade Santa Cecília
Engenharia Mecânica e de Produção
Resistência dos Materiais
com um material diferente.

Assim, para uma determinada tensão de cisalhamento, e um determinado material a relação entre esta tensão e o ângulo γ é uma constante. A essa constante dá-se o nome de Módulo de Rigidez Transversal e se indica pela letra G .

$$G = \frac{\tau}{\gamma} \quad (11)$$

Usando as duas igualdades da expressão 10, tem-se:

$$R \times d\theta = \gamma \times dx \quad (12)$$

Da expressão 11 tem-se:

$$\gamma = \frac{\tau}{G} \quad (13)$$

Substituindo a expressão 13 na 12 se obtém:

$$R \times d\theta = \frac{\tau}{G} \times dx \quad (14)$$

Substituindo a expressão 6 na expressão 14 tem-se:

$$R \times d\theta = \frac{\frac{T}{I_t} \times R}{G} \times dx \rightarrow$$

$$d\theta = \frac{T}{G \times I_t} \times dx \quad (15)$$

O ângulo de deformação por torção na extremidade de um trecho de comprimento l , fica:

$$\theta = \int_0^l d\theta = \int_0^l \frac{T}{G \times I_t} \times dx \rightarrow$$

$$\theta = \int_0^{\ell} \frac{T}{G \times I_t} \times dx \quad (16)$$

No caso da seção ser constante e não existir variação no momento de torção ao longo do comprimento, é possível escrever:

$$\theta = \frac{T}{G \times I_t} \int_0^{\ell} dx \rightarrow$$

$$\theta = \frac{T \times \ell}{G \times I_t} \quad (17)$$

OBS:

Note-se que para o dimensionamento à torção não se dá importância ao sinal da tensão de cisalhamento. Para a determinação do ângulo θ , este, segue a mesma convenção de sinais efetuada para o momento de torção.

TORÇÃO DE BARRAS NÃO CIRCULARES

Quando as barras não são circulares, a consideração que a tensão de cisalhamento atuante em um ponto é proporcional à sua distância ao centro de gravidade da seção, não é mais válida.

Tome-se por exemplo uma seção quadrada, como a mostrada na figura 6.

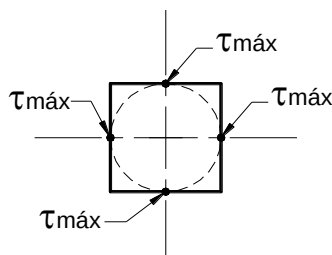


Figura 6 – Tensão de cisalhamento máxima em uma seção quadrada

Nesta seção, os vértices do quadrado, que são os pontos mais afastados do centro de gravidade, a tensão é nula. A tensão máxima ocorre nos pontos do perímetro da seção que são tangentes ao maior círculo inscrito na seção.

O estudo da localização destes pontos e, por consequência, das tensões máximas que nelas ocorrem, é feito pela teoria da elasticidade, que não é objeto de nosso curso.

A tabela 1, mostra valores de W_t e I_t , para algumas seções transversais.

Tabela 1

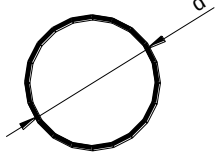
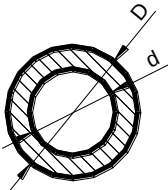
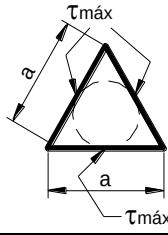
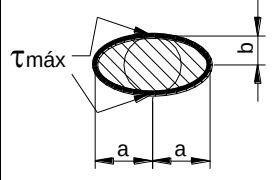
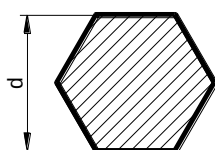
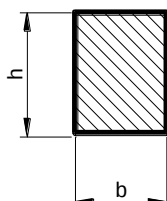
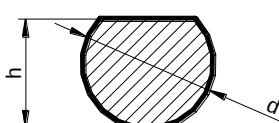
Seção Transversal	I_t	W_t
	$\frac{\pi \times d^4}{32}$	$\frac{\pi \times d^3}{16}$
	$\frac{\pi}{32} (D^4 - d^4)$	$\frac{\pi}{16 \times D} (D^4 - d^4)$
	$\frac{a^4 \sqrt{3}}{80}$	$\frac{a^3}{20}$
	$\frac{\pi \times a^3 \times b^3}{a^2 + b^2}$	$\frac{\pi \times a \times b^2}{2}$

Tabela 1 – Continuação

Seção Transversal	I_t	W_t		
	$0,105 \times d^4$	$\frac{188 \times d^3}{10}$		
	$\beta \times h \times b^3$	$\alpha \times h \times b^2$		
	h/b	β	h/b	α
	1	0,14	1	0,21
	2	0,23	2	0,25
	3	0,26	3	0,27
	4	0,28	4	0,28
	5	0,29	5	0,29
	10	0,31	10	0,31
	20	0,32	20	0,32
	∞	0,33	∞	0,33
	$\frac{d^4}{16} \left(2,6 \frac{h}{d} - 1 \right)$	$\frac{d^3}{8} \left(\frac{2,6 \frac{h}{d} - 1}{0,3 \frac{h}{d} + 0,7} \right)$		

TORÇÃO DE BARRAS COM SEÇÃO ANELAR DE PAREDE FINA.

Seja uma barra com seção anelar de parede fina, cuja área da seção da parede é A , como se mostra na figura 7.

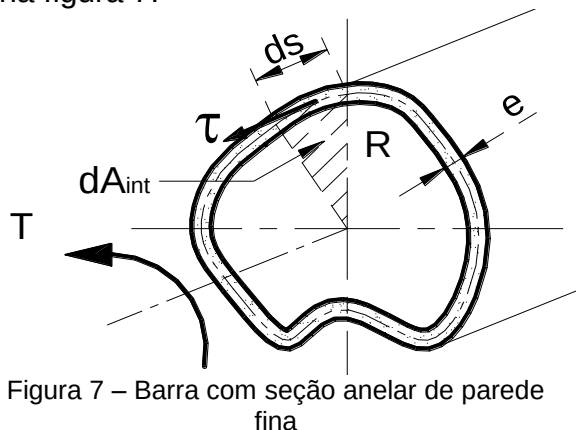


Figura 7 – Barra com seção anelar de parede fina

Para que a barra seja considerada de seção anelar com parede fina, é necessário que, em qualquer ponto da área, a espessura e seja muito pequena quando comparada com a distância entre seu ponto médio e o centro de gravidade da seção (R).

Com esta consideração, é possível dizer que, para os pontos de uma mesma linha de espessura, a variação na tensão de cisalhamento desenvolvida é desprezível.

Sabe-se que para que o equilíbrio seja satisfeito é necessário:

$$T = \int_A \tau \times e \times ds \times R \quad (18)$$

A figura 8 mostra um elemento de comprimento onde as espessuras são diferentes em seus limites.

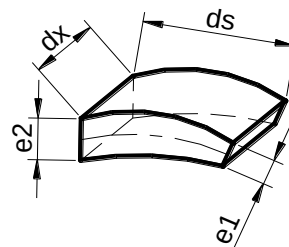


figura 8 – Elemento de comprimento de anel com espessuras diferentes

Assim, para que um elemento de comprimento do anel (ds) esteja em equilíbrio é necessário que, o produto entre a tensão de cisalhamento e a espessura seja constante.

$$\tau_1 \times e_1 = \tau_2 \times e_2 = \tau \times e = \text{constante}$$

Com esta relação a expressão 18 fica:

$$T = \tau \times e \int_A R ds \quad (19)$$

Note-se que o produto **Rds** da expressão é igual ao dobro da área **dA_{int}** que aparece na figura 7. Com esta afirmação é possível escrever:

$$T = \tau \times e \int_A 2dA_{int} \rightarrow$$

$$T = \tau \times e \times 2A_{int} \rightarrow$$

$$\tau = \frac{T}{2 \times e \times A_{int}} \quad (20)$$

onde **A_{int}** é a área limitada pelo perímetro médio da parede da seção.

Para seções onde existe variação na espessura da parede, a tensão de cisalhamento máxima ocorre nos pontos onde a espessura é menor. Assim sendo,

$$\max\{\tau\} = \frac{T}{2 \times e_{min} \times A_{int}} \quad (21)$$

onde **e_{min}** é a menor espessura de parede no anel da seção transversal.

Ao se comparar a expressão 21 com a expressão 8, se verifica que existe semelhança entre elas, desde que:

$$W_t = 2 \times e_{min} \times A_{int} \quad (22)$$

A determinação do ângulo θ pode ser feita usando a expressão 17 desde que o momento de inércia à torção **I_t** , seja determinado para este tipo de seção. Estes momentos são determinados por:

$$I_t = \frac{4 \times A_{int}^2}{\oint \frac{ds}{e}} \quad (23)$$

OBS:

A integral $\oint \frac{ds}{e}$, para seções com trechos de espessura constante, pode ser substituída por $\sum_1^n \frac{L_i}{e_i}$. Nesta expressão, **L_i** representa o comprimento do trecho onde a espessura é **e_i** e **n** o número de trechos.

A figura 9 mostra uma seção transversal com quatro trechos de espessura diferente.

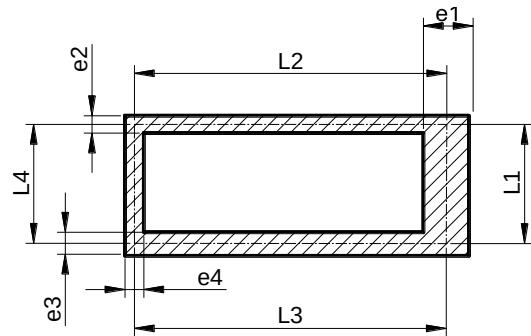


Figura 9 – Seção transversal com trechos de espessuras diferentes.

TORÇÃO DE BARRAS COM SEÇÃO DE PAREDE FINA.

Seja uma barra com seção de parede fina, como se mostra na figura 10.

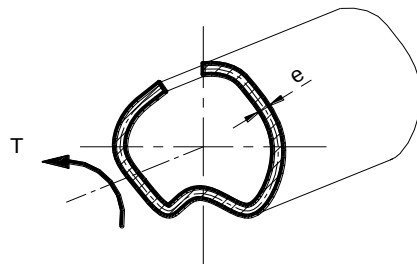


Figura 10 – Seção de parede delgada solicitada à torção.

A torção para este tipo de seção é considerada como sendo a torção em um retângulo onde a relação $\frac{h}{b} = \infty$.

Para este tipo de seção, W_t e I_t ficam:

$$W_t = \frac{h \times b^2}{3} \quad I_t = \frac{h \times b^3}{3} \quad (24)$$

onde **h** é igual ao comprimento do perímetro médio da seção e **b** é a espessura desta seção; como se observa na figura 11

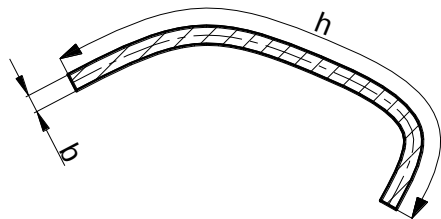


Figura 11 – seção de parede delgada

Quando existe variação na direção da seção e/ou variação na espessura da forma mostrada na figura 12, W_t e I_t ficam:

$$W_t = \frac{\sum h_i \times b_i^3}{3 \times b_{\text{máx}}} \quad I_t = \frac{\sum h_i \times b_i^3}{3} \quad (24)$$

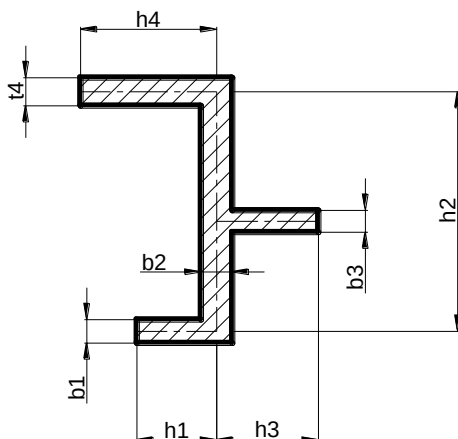


Figura 12 – Seção delgada

MOLAS HELICOIDAIS

A figura 13 representa um corte de uma mola helicoidal sendo comprimida por uma carga P.

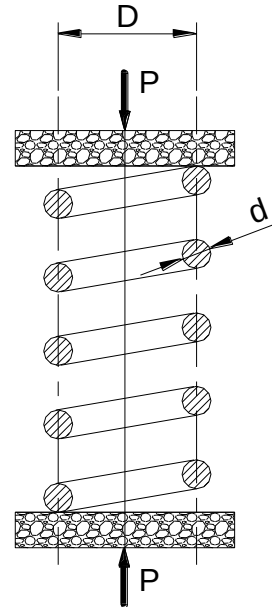


Figura13 – Mola helicoidal sendo comprimida

Nesta mola pode ser identificar:

D = diâmetro da mola
d = diâmetro do fio da mola
n = número de espiras da mola

Tensões de Cisalhamento

Ao se observar uma seção transversal qualquer do fio da mola, verifica-se que em seu centro de gravidade atua:

- Uma força cortante - P
- Um momento de torção -

$$T = P \times \frac{D}{2}$$

Estes esforços solicitantes estão relacionados a tensões de cisalhamento, como mostram as figuras 14 e 15.

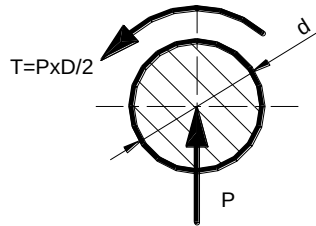


Figura 14 – Esforços solicitantes na seção

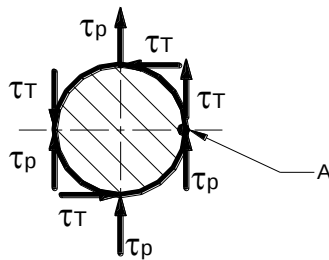


Figura 15 – Tensões nos pontos da seção.

Nos pontos da seção atuam as tensões τ_p correspondente à força cortante e τ_T , correspondente ao momento de torção

$$\tau_p = \frac{P}{A} \quad \tau_T = \frac{T}{W_t} \quad (25)$$

Note-se que no ponto A atua a maior tensão resultante que é igual à soma entre τ_p e τ_T . Esta resultante pode ser escrita:

$$\tau = \frac{T}{W_t} + \frac{P}{A} \quad (26)$$

Como a seção transversal é circular com diâmetro d , tem-se:

$$\tau = \frac{P \times \frac{D}{2}}{\frac{\pi \times d^3}{16}} + \frac{P}{\frac{\pi \times d^2}{4}} \rightarrow$$

$$\tau = \frac{4 \times P}{\pi \times d^2} \left(1 + \frac{2 \times D}{d} \right) \quad (26)$$

Quando a parcela $\frac{2 \times D}{d}$ for muito maior que 1, é possível escrever:

$$\tau = \frac{4 \times P}{\pi \times d^2} \left(\frac{2 \times D}{d} \right) \rightarrow$$

$$\tau = \frac{8 \times P \times D}{\pi \times d^3} \quad (27)$$

Variação de comprimento de uma mola

Para o estudo da variação de comprimento de uma mola é possível estudar uma que possua uma única espira.

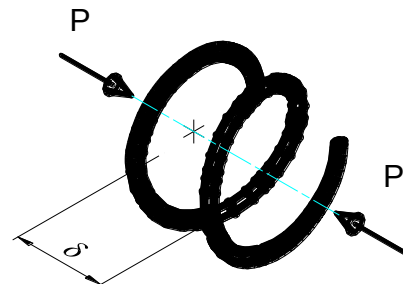


Figura 16 – Mola com uma espira solicitada à compressão

Na figura 16 δ representa a variação de comprimento que a mola sofrerá, devido a ação da carga P .

Para cada infinitésimo de comprimento de espira dx , é possível escrever:

$$d\delta = R \times d\theta \quad (28)$$

Como, de acordo com a expressão 15:

$$d\theta = \frac{T}{G \times I_t} \times dx \rightarrow$$

$$d\delta = R \times \frac{T}{G \times I_t} \times dx \quad (29)$$

Para uma espira, $dx = R \times d\phi$
onde, ϕ é o ângulo de rotação da
espira, que vale 2π . Assim tem-se:

$$d\delta = R \times \frac{T}{G \times I_t} \times R \times d\phi \rightarrow$$

$$\delta = \int_0^{2\pi} \left(R^2 \times \frac{T}{G \times I_t} \right) d\phi \quad (30)$$

Como todos os elementos da
integral são constantes ao longo do
ângulo, tem-se:

$$\delta = R^2 \times \frac{T}{G \times I_t} \times 2\pi \quad (31)$$

Como $T = P \times \frac{D}{2}$ e $I_t = \frac{\pi \times d^4}{32}$,
tem-se:

$$\delta = \frac{8 \times P \times D^3}{G \times d^4} \quad (32)$$

para uma mola com n espiras:

$$\delta = \frac{8 \times P \times D^3 \times n}{G \times d^4} \quad (33)$$