

Capítulo I – Tensões

Seja um corpo sob a ação de esforços externos em equilíbrio, como mostra a figura I-1:

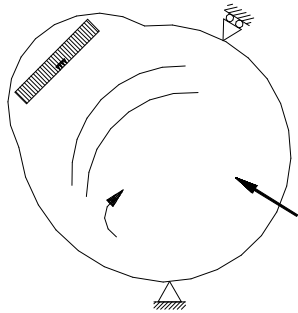


Figura I-1 – Corpo em equilíbrio sob a ação de esforços

Considere-se um **ponto** deste corpo. Para que apareçam os esforços que atuam neste ponto, é preciso dividir o corpo em duas partes, por meio de um **plano** (a superfície geométrica mais simples) que contenha o ponto. Feita essa divisão, aparece uma seção do corpo, a qual contém o ponto.

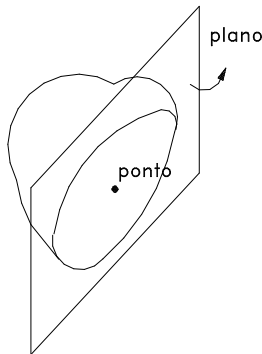


Figura I-2 – Ponto e plano em um corpo

Isole-se, então, uma das duas partes obtidas, de modo que ela se comporte como se não tivesse ocorrido a divisão; isto só é possível se atuarem esforços na seção, que traduzam a influência da outra parte do corpo (na seção em exame) e mantenham o equilíbrio da parte isolada.

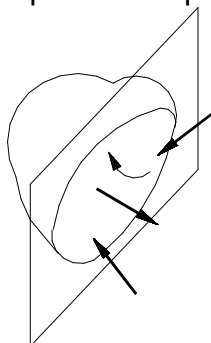


Figura I-3 – Esforços que atuam na seção para equilibrar o corpo

Tome-se, agora, uma pequena área que contém o ponto, área esta que é uma parte da seção.

Chamando esta pequena área de ΔA , será $\Delta \vec{F}$ a parte dos esforços que nela atua.

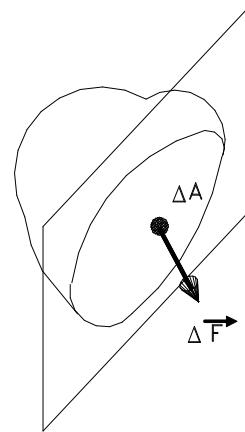


Figura I-4 – trecho de área com sua força correspondente

Pode-se, assim, definir **tensão** para o ponto e o plano considerados, como sendo

$$\vec{p} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{F}}{\Delta A}$$

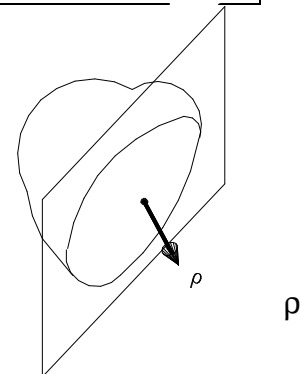


Figura I-5 – Tensão atuante em um ponto

OBS:

- A tensão depende de duas variáveis, o **ponto** e o **plano**; ela traduz a influência da outra parte do corpo no plano e ponto considerados.
- A tensão tem como dimensão força dividida por área.

1 Tensão Normal e Tensão de Cisalhamento.

Constata-se que a tensão assemelha-se a um vetor e pode-se representá-la por suas projeções em duas direções perpendiculares entre si, a saber:

- Normal ao plano e
- Contida no plano.

À projeção cuja direção é normal (ou seja, perpendicular) ao plano, dá-se o nome de **Tensão Normal**, que é indicada pela letra grega σ (sigma). À componente cuja direção está contida no plano, é dado o nome de **Tensão de Cisalhamento**, ou tensão tangencial, indicada pela letra grega τ (táu).

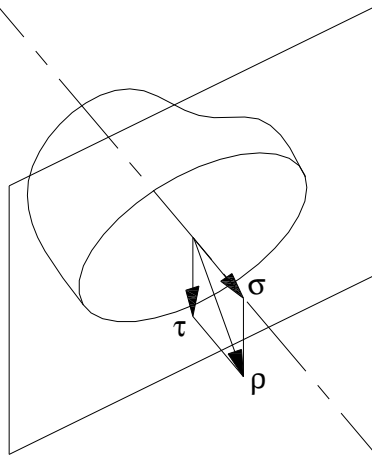


Figura I-6 - Tensão normal e tensão de cisalhamento como componentes da tensão ρ .

Estas tensões, normal e de cisalhamento, também são funções das mesmas duas variáveis, o ponto e o plano.

1.1 Tensão Normal

Sejam dois planos paralelos e infinitamente próximos; sejam, ainda, dois pontos, um de cada plano, como se mostra na figura I-7.

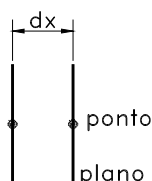


Figura I-7

Agindo tensões normais (σ) nestes pontos e planos, observa-se a ocorrência de variação na distância entre eles.

Ocorre **tração**, sendo positiva a tensão normal, quando aumenta a distância entre os dois pontos.

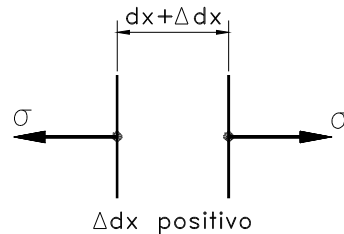


Figura I-8 – Tensão normal positiva – Tração

No caso contrário ocorre **compressão**, sendo negativa a tensão normal.

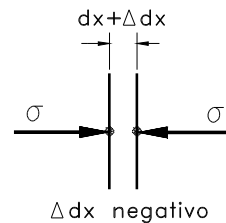


Figura I-8 – Tensão normal negativa – Compressão

1.2 Tensão de Cisalhamento

Nos mesmos planos e pontos anteriores, a tensão de cisalhamento provoca escorregamento entre eles.

A tensão de cisalhamento (τ) positiva “tende a girar” o ponto, em torno do ponto vizinho, no sentido horário.

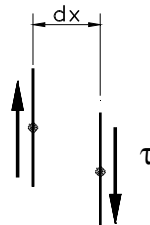


Figura I-9 – Tensão de Cisalhamento positiva

A tensão de cisalhamento (τ) negativa “tende a girar” o ponto, em torno do ponto vizinho, no sentido anti-horário.

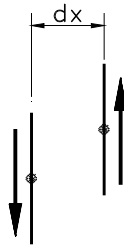


Figura I-10 – Tensão de cisalhamento negativa

1.3 Análise da tensão em um ponto

Considere-se uma barra reta sob a ação de esforços externos em equilíbrio. Considere-se ainda que, os esforços externos, aplicados a essa barra, têm como linha de ação o eixo dessa barra, como mostra a figura I-11.

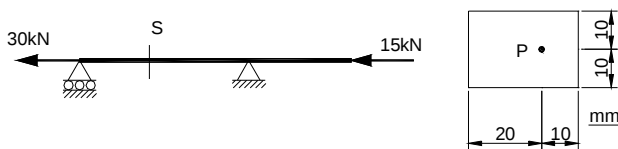


Figura I-11 – Barra solicitada por força normal

Nesta situação, as seções transversais da barra são solicitadas apenas pela força normal N , como mostra a figura I-12.

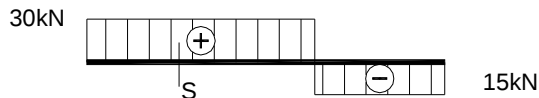


Figura I-12 – Diagrama de Forças Normais

A fim de determinar a tensão ρ que atua no ponto P da seção transversal S , da barra a figura I-11, admita-se (imagine-se) que essa tensão ρ tem valor dado por:

$$\rho = \frac{\text{FORÇA}}{\text{ÁREA}}$$

onde:

FORÇA = resultante dos esforços internos na seção determinada pela interseção da barra com o plano dado (Força normal N que atua na seção).

ÁREA = área dessa seção (A).

Essas tensões ρ possuem a mesma direção e sentido do esforço interno (FORÇA) na seção.

Assim, é possível determinar a tensão normal que atua no ponto P e no plano da seção transversal S , para a barra prismática da figura I-11:

$$\text{FORÇA} = N = 30\text{kN} = 30.000\text{N}$$

$$\text{ÁREA} = A = 30 \text{ mm} \times 20 \text{ mm} = 600\text{mm}^2 \rightarrow A = 6 \times 10^{-4}\text{m}^2$$

Daí:

$$\rho = \frac{\text{FORÇA}}{\text{ÁREA}} = \frac{30000\text{N}}{6 \times 10^{-4}\text{m}^2} = 50.000.000 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = 50\text{MPa}$$

A tensão ρ assim obtida tem, por hipótese, a mesma direção da FORÇA, que nesse exemplo é a normal N . Portanto, ρ é perpendicular, nesse exemplo, ao plano da seção S .

A tensão normal σ , componente de ρ , normal ao plano da seção, é então igual à própria tensão ρ .

A tensão τ que atua no ponto, componente de ρ na direção do plano da seção, é, conseqüentemente, igual a zero.

$$\begin{aligned} \sigma &= \rho \\ \tau &= 0 \end{aligned}$$

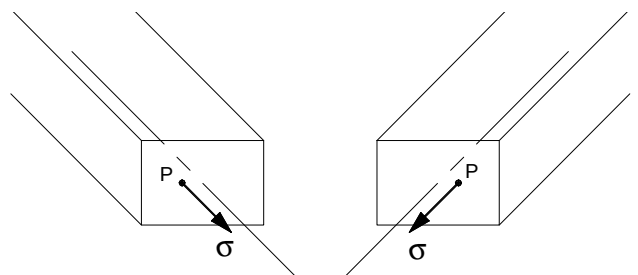


Figura I-13 – Tensão normal que atua no ponto P .

Considerando que o quociente força por área forneça tensão, para o mesmo ponto P estudado até agora, a tensão normal no plano que faz 30° com o plano da seção transversal pode ser obtida por meio de:

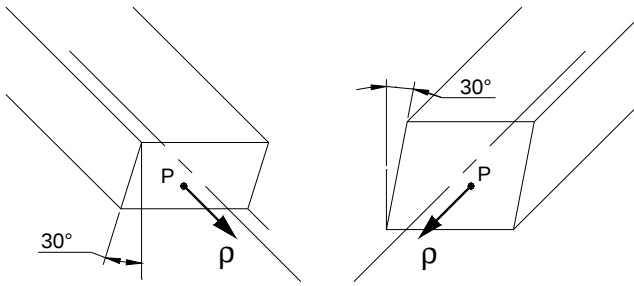


Figura I-14

Para este plano inclinado, a área vale:

$$A = \frac{20\text{mm} \times 30\text{mm}}{\cos 30^\circ} = 400\sqrt{3}\text{mm}^2 = 4\sqrt{3} \times 10^{-4}\text{m}^2$$

e a tensão ρ , fica:

$$\rho = \frac{\text{FORÇA}}{\text{ÁREA}} = \frac{30.000\text{N}}{4\sqrt{3} \times 10^{-4}\text{m}^2}$$

A tensão normal (σ) é a normal ao plano e vale:

$$\sigma = \rho \cos 30^\circ = \frac{30.000\text{N}}{4\sqrt{3} \times 10^{-4}\text{m}^2} \times \cos 30^\circ = 37,5\text{MPa}$$

Neste plano, o ponto P também recebe a tensão de cisalhamento (τ).

$$\tau = \rho \sin 30^\circ = \frac{30.000\text{N}}{4\sqrt{3} \times 10^{-4}\text{m}^2} \times \sin 30^\circ = 211,65\text{MPa}$$

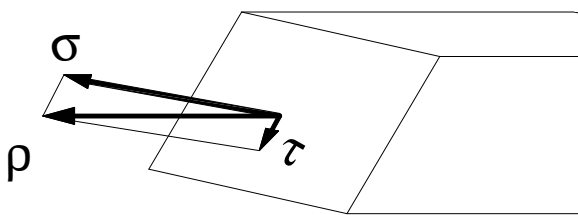


Figura I-15 – Tensões no ponto P em um plano a 30° do plano da seção transversal

Na figura I-15, para um observador que está à direita da barra é possível fazer a seguinte representação:

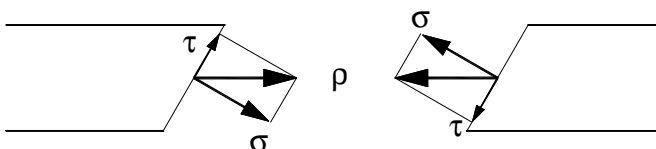


Figura I-16 – Tensões no ponto P em um plano a 30° do plano da seção transversal, observadas da direita da barra

Para esta situação, a tensão de cisalhamento τ tem sinal negativo.

1.4 Deformações e Deslocamentos

1.4.1 Deformações

O material usado pela Resistência dos Materiais é o sólido pouco deformável e para este material, as deformações medem as mudanças na posição relativa entre pontos muito próximos; assim, partindo com dois pontos e seus planos paralelos na situação inicial:

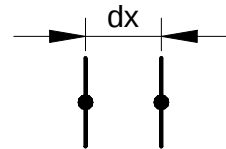


Figura I-17

Em função das tensões que neles atuam, a posição relativa final pode ser:

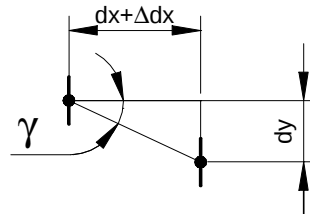


Figura I-18

Esta posição pode ser encarada como resultante da soma (superposição) de uma variação na distância entre os pontos (e entre os planos) com um escorregamento entre os pontos (e entre os planos).

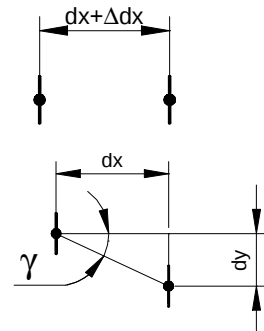


Figura I-19 – Movimento dos pontos e planos

O alongamento ϵ (épissilon) e a distorção γ (gama) são as chamadas

deformações, números muito pequenos e sem dimensão, usados como medida para as pequenas mudanças nas posições relativas.

Assim, o alongamento ϵ mede a variação de distância relativa entre os dois planos (e pontos) através de:

$$\epsilon = \frac{\Delta dx}{dx}$$

onde Δdx é variação na distância inicial dx .

Vale observar que o alongamento ϵ possui o mesmo sinal que a variação Δdx . Eles terão sinal positivo quando a distancia aumentar (tração) e negativo no caso contrário (compressão).

A distorção γ , por sua vez, mede o escorregamento (deslizamento) relativo entre os planos.

$$\gamma = \frac{dy}{dx}$$

O sinal da distorção γ será positivo quando o ponto “tende a girar” no sentido horário, em torno do vizinho e negativo no sentido contrário.

Observando a figura I-19, se verifica que a relação geométrica entre a distorção γ e dy é dada por:

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{dy}{dx} \rightarrow dy = dx \times \operatorname{tg} \gamma$$

Estas deformações são suficientemente pequenas para que se possa escrever:

$$\gamma = \operatorname{tg} \gamma \quad \text{e} \quad dy = \gamma dx$$

Uma observação importante é que as deformações são funções de duas variáveis: ponto e plano.

1.4.2 Deslocamentos

Como consequência das deformações (mudanças nas distâncias relativas entre pontos e entre planos

infinitamente próximos), ocorrem deslocamentos, de pontos e de seções transversais das barras da estrutura, em relação às suas posições iniciais.

Tais deslocamentos, embora sejam em geral pequenos, são finitos, isto é, não são infinitesimais (infinitamente pequenos).

É o que acontece para a barra reta da figura I-20, que na ausência de esforços possui comprimento ℓ , cujas seções transversais, nesta situação inicial, distam entre si de uma distância infinitesimal dx .

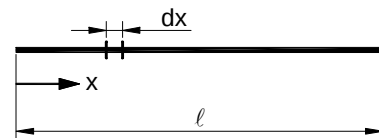


Figura I-20 – Barra reta de comprimento ℓ .

O comprimento da barra é igual à soma das distâncias dx das seções vizinhas (justapostas), de onde resulta:

$$\ell = \int_0^{\ell} dx$$

Imaginando que a variação de comprimento $\Delta \ell$ da barra resulta da soma das variações das distâncias entre as seções justapostas, ao longo de toda a barra, é possível escrever:

$$\Delta \ell = \int_0^{\ell} \Delta dx$$

Ao ocorrer a variação nas distâncias entre seções vizinhas, o novo comprimento da barra passa a ser:

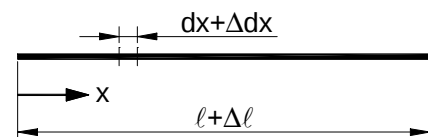


Figura I-21 – Barra reta de comprimento ℓ e variação de comprimento $\Delta \ell$.

$$\ell + \Delta \ell = \int_0^{\ell} (dx + \Delta dx) = \int_0^{\ell} dx + \int_0^{\ell} \Delta dx$$

Sendo, porém, $\epsilon = \frac{\Delta dx}{dx}$, se obtém

$$\Delta dx = \epsilon dx$$

$$\ell + \Delta\ell = \ell + \int_0^{\ell} \epsilon dx$$

Assim, a variação de comprimento pode ser escrita como:

$$\Delta\ell = \int_0^{\ell} \epsilon dx$$

OBS:

Um acaso particular importante ocorre quando ϵ é constante. Nesta situação, a equação acima pode ser escrita:

$$\Delta\ell = \epsilon \int_0^{\ell} dx \quad \rightarrow \quad \epsilon = \frac{\Delta\ell}{\ell}$$

ou seja, é possível medir a deformação através de $\Delta\ell$ e ℓ .

1.5 Tensões com Força Normal

Considere-se o caso de uma barra reta, que pode ser prismática, ou não, solicitada apenas por força normal N , como a mostrada na figura I-22.

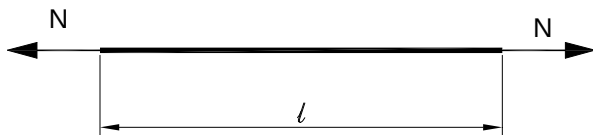


Figura I-22 – Barra reta solicitada por uma força normal N .

Como, por hipótese, as seções são planas, antes e depois da aplicação da força normal, todos os pontos de uma seção qualquer da barra sofrem o mesmo deslocamento ϵdx , em relação a uma seção vizinha, que, na ausência de esforços, estava anteriormente, a uma distância dx .

Assim, para todos os pontos da seção, têm-se o mesmo alongamento ϵ , em relação aos pontos da seção vizinha.

Usando material homogêneo (todos os pontos materiais têm iguais características) e isotrópico (estas características não dependem de direção) é aceitável considerar

Tensões

que, para haver alongamento constante ocorra solicitação também constante, sendo esta solicitação a tensão normal.

$$N = \int_A \sigma dA = \sigma \int_A dA = \sigma \times A \quad \text{ou seja,}$$

$$\sigma = \frac{N}{A}$$

Essa expressão deve-se ressaltar, não é sempre válida. Essa hipótese é aceitável para regiões das barras não próximas da mudança brusca de seção, e da aplicação de forças externas que não se assemelham a uma pressão constante em toda a seção. A figura I-23 mostra algumas situações onde a expressão não é válida.

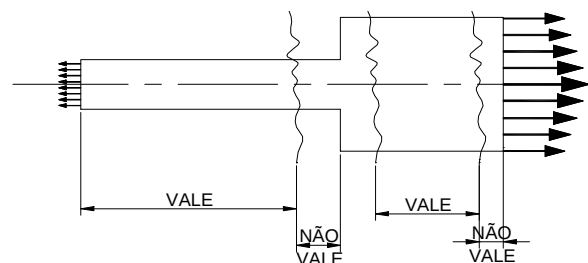
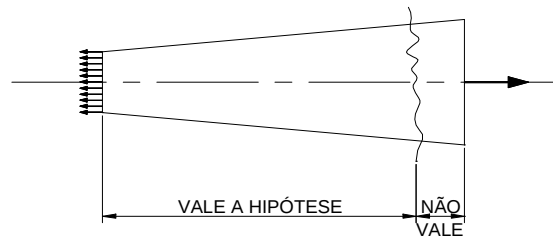


Figura I-23 – Situações onde a expressão $\sigma = \frac{N}{A}$ não é válida.

Nas barras curvas com raio de curvatura (do eixo da barra) da mesma ordem de grandeza que a dimensão da seção transversal (barra de grande curvatura), a hipótese, também, não fornece bons resultados.

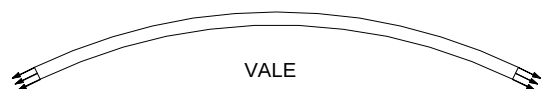




Figura I-24 – Barras curvas.

Nas barras cuja seção transversal apresenta uma dimensão muito menor que a outra (seção delgada), a hipótese, também, não vale.

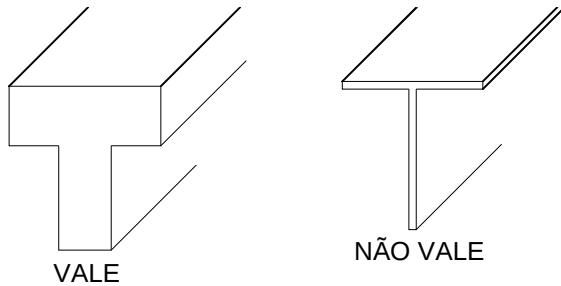


Figura I-25 – Barras de seção delgada.

OBS:

No presente curso considera-se que a tensão normal nos pontos e no plano da seção vale:

$$\sigma = \frac{N}{A}$$

1.6 Exemplos

1. Determinar a tensão normal nos pontos das seções S_1 e S_2 da barra da figura I-26.

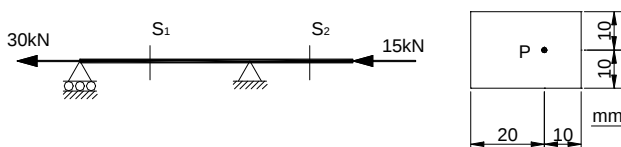


Figura I-26

Solução:

O primeiro passo a ser executado é a determinação dos esforços solicitantes que

ocorrem nas seções da barra. A figura I-27 representa o diagrama de esforços solicitantes para esta barra.

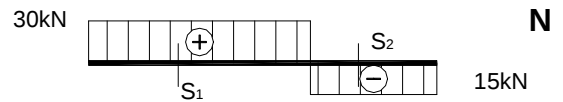


Figura I-27

Como é possível observar, a força normal que atua na seção S_1 é positiva e vale 30kN enquanto a força normal que atua na seção S_2 é negativa e vale 15kN. Desta forma se pode determinar as tensões nas seções S_1 e S_2 :

As seções S_1 e S_2 têm área igual a:

$$A = 30 \text{ mm} \times 20 \text{ mm} = 600 \text{ mm}^2 = 6 \times 10^{-4} \text{ m}^2.$$

Seção $S_1 \rightarrow$

$$\sigma = \frac{N}{A} = \frac{30000 \text{ N}}{6 \times 10^{-4} \text{ m}^2} = 50.000.000 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = 50 \text{ MPa}$$

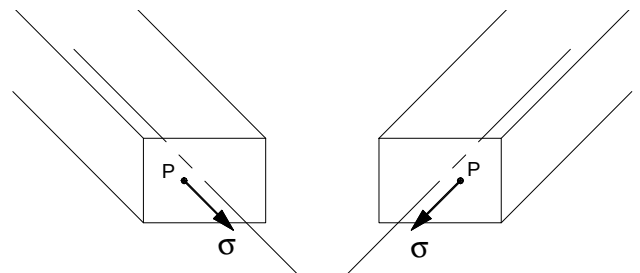


Figura I-28

Seção $S_2 \rightarrow$

$$\sigma = \frac{N}{A} = \frac{-15000 \text{ N}}{6 \times 10^{-4} \text{ m}^2} = -25.000.000 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = -25 \text{ MPa}$$

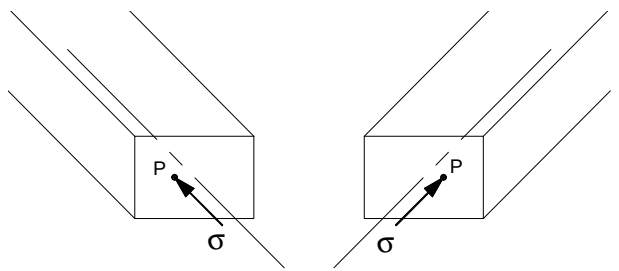


Figura I-29

2. Determinar a tensão normal nos pontos das seções S_1 e S_2 da barra da figura I-30.

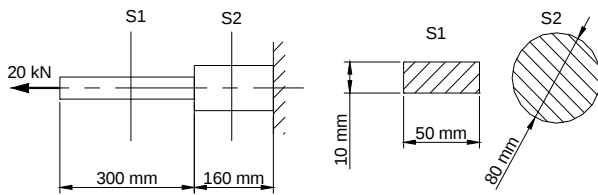


Figura I-30

Solução:

O primeiro passo a ser executado é a determinação dos esforços solicitantes que ocorrem nas seções da barra. A figura I-31 representa o diagrama de esforços solicitantes para esta barra.

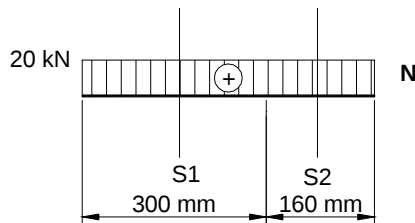


Figura I-31

Como é possível observar, a força normal que atua nas duas seções é positiva e vale 20 kN. Desta forma se pode determinar as tensões nas seções S_1 e S_2 :

Seção $S_1 \rightarrow$

$$\sigma = \frac{N}{A_{S1}} = \frac{20.000\text{N}}{50\text{mm} \times 10\text{mm}} = 40 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} = 40 \times 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

$$\sigma = 40\text{MPa}$$

Seção $S_2 \rightarrow$

$$\sigma = \frac{N}{A_{S2}} = \frac{20.000\text{N}}{\frac{\pi \times (80\text{mm})^2}{4}} = 3,98 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} = 3,98\text{MPa}$$

$$\sigma = 3,98\text{MPa}$$

1.7 Reologia

A reologia estuda relações entre tensões e deformações para os materiais.

1.7.1 Ensaio de Tração

O ensaio de tração (ou de compressão) consiste em se aplicar a uma barra prismática, de comprimento inicial ℓ e área da seção transversal inicial A , uma força normal, constante ao longo do comprimento da barra, produzindo variação de comprimento $\Delta\ell$, crescente com o tempo, até que ocorra a ruptura da barra.

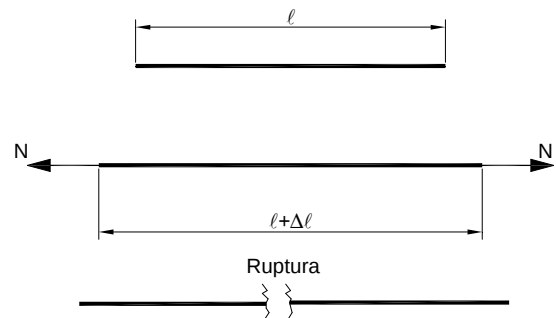


Figura I-32

Estes ensaios são realizados em máquinas semelhantes à apresentada na figura I-33.

Nestas máquinas a barra prismática, chamada de corpo de prova, é fixada por suas extremidades. Uma dessas extremidades é presa ao cabeçote móvel e a outra no cabeçote fixo. O cabeçote móvel se afasta do fixo com velocidade constante durante o ensaio.

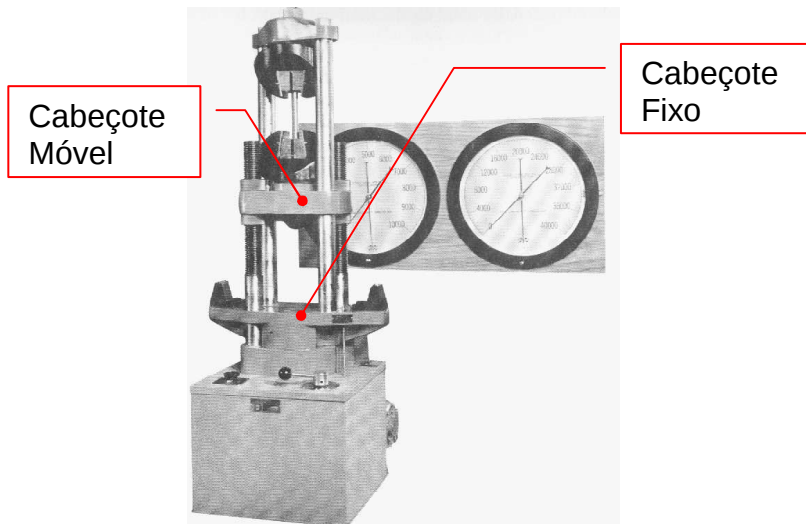


Figura I-33 – Máquina para o Ensaio de tração

Nestas máquinas a barra prismática, chamada de corpo de prova, é fixada por suas extremidades. Uma dessas extremidades é presa ao cabeçote móvel e a outra no cabeçote fixo. O cabeçote móvel se afasta do fixo com velocidade constante durante o ensaio.

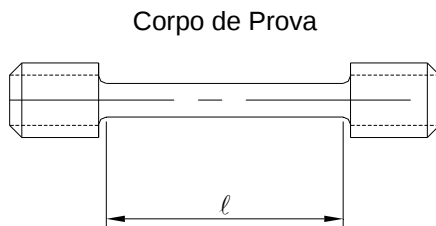


Figura I-34 – Corpo de prova para o ensaio de tração

Os mostradores que aparecem na figura da máquina de tração registram, respectivamente, o afastamento dos cabeçotes e a resistência do corpo de prova a este avanço.

O afastamento dos cabeçotes nada mais é do que a variação de comprimento Δl que o corpo de prova está sendo submetido e a resistência a este avanço é a força normal N de solicitação.

O quociente entre a força normal N de solicitação e a área A da seção transversal inicial do corpo de prova fornece a tensão normal de tração σ .

Por ser o corpo de prova uma barra prismática com material homogêneo e isotrópico, pode-se obter em cada instante a deformação ϵ pela relação:

$$\epsilon = \frac{\Delta l}{l}$$

Com isto, se torna possível verificar a relação entre a tensão σ e a deformação ϵ em cada instante do ensaio e traçar um gráfico que mostre esta função até a ruptura do corpo de prova. Este gráfico é conhecido como **Diagrama Tensão x Deformação**.

A figura I-35 é um exemplo deste tipo de diagrama.

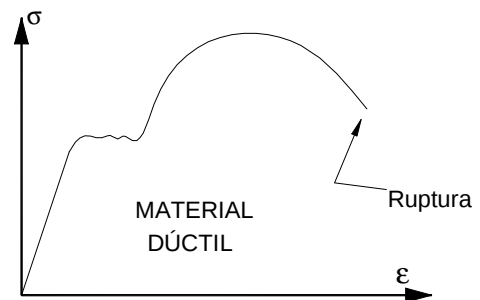


Figura I-35 – Diagrama Tensão - Deformação

Deve-se notar que seria possível desenhar, também, com os resultados do ensaio de tração, um gráfico $N \times \Delta l$. Tal gráfico, porém, caracterizaria apenas o comportamento da barra.

Com o diagrama tensão x deformação, se busca obter um gráfico característico do material que constitui a barra.

Como se verá a seguir, um material irá apresentar um diagrama tensão x deformação que se enquadra em um entre dois tipos possíveis de diagrama.

Sabendo que tensão e deformação estão relacionadas, procura-se, também, a partir do diagrama, estudar essa relação, obtendo inclusive expressões para as funções tensão - deformação.

Tais expressões, como é o caso da Lei de Hooke, que será vista adiante, são chamadas de equações constitutivas do material.

1.7.1.1 Tipos de Materiais

Dependendo do material, se pode obter um diagrama Tensão x Deformação entre dois tipos. Um desses tipos é o da figura I-35, típico dos materiais chamados dúcteis, e o outro é o da figura I-36, característico dos materiais frágeis.

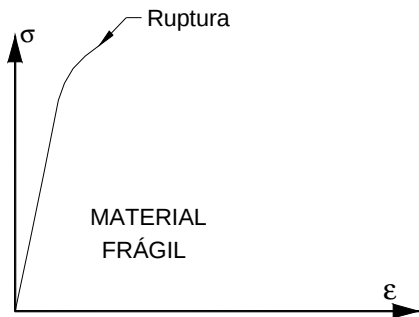


Figura I-36 – Diagrama Tensão x Deformação para materiais frágeis.

A diferença básica entre estes diagramas é que no primeiro deles, do **material dúctil**, existe uma região onde ocorre uma grande deformação com a tensão mantendo-se praticamente constante. Esta região é conhecida como **Região do Escoamento**. Importante observar que o material atinge uma grande deformação antes da ocorrência da ruptura. Em geral, a seção onde ocorre a ruptura não é plana e nas suas vizinhanças existe um grande estreitamento de seção conhecido como **estricção**.

A figura I-37 mostra a ruptura deste tipo de material.

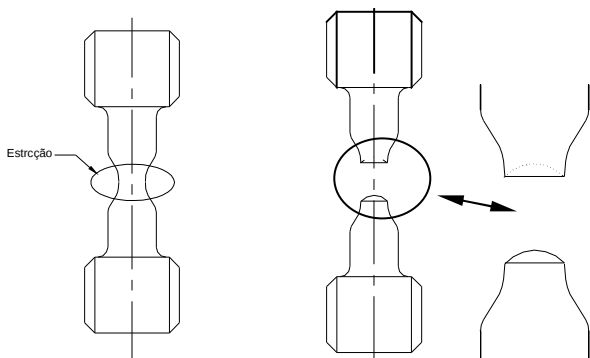


Figura I-37 – Ruptura do corpo de prova de um material dúctil.

Para os **materiais frágeis**, a deformação até a ruptura é pequena, quando comparada com aquela que ocorre

com os materiais dúcteis. A aparência da ruptura é semelhante a da figura I-38:

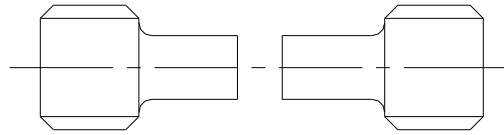


Figura I-38 – Ruptura do corpo de prova de um material frágil.

Note-se que na fratura dos materiais frágeis não é significativa a redução de seção como ocorre com os materiais dúcteis (não há estricção).

1.7.2 Análise do diagrama Tensão-Deformação

A figura I-39 reproduz o diagrama característico dos materiais dúcteis, destacando-se, porém, a existência de vários fenômenos importantes.

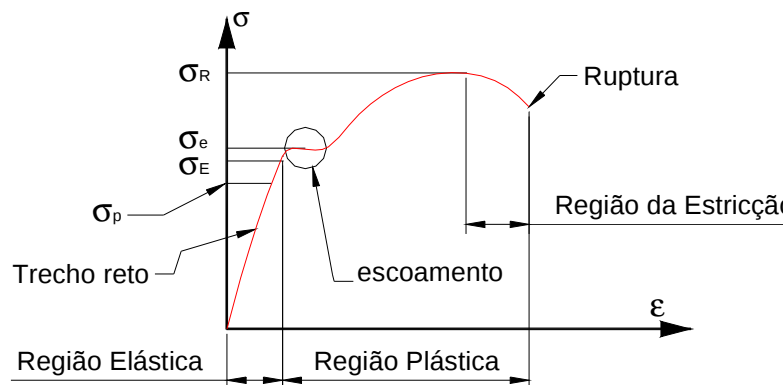


Figura I-39 – Diagrama característico dos materiais dúcteis

Primeiramente, na figura I-39, se deve observar o trecho reto, correspondente a uma fase inicial do ensaio, onde a tensão e a deformação estão relacionadas através de uma constante.

$$\sigma = \text{constante} \times \epsilon$$

Verifica-se que essa constante é uma característica do material da barra (mudando-se o material da barra, muda a inclinação obtida) e o seu valor é o coeficiente angular da reta. Esta constante é chamada de **Módulo de Elasticidade**

Longitudinal (**E**) do material, ou Módulo de Young, de onde se escreve, então:

$$\sigma = E \times \varepsilon$$

expressão conhecida como Lei de Hooke.

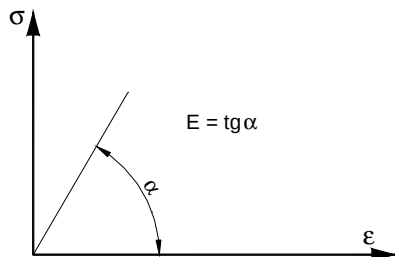


Figura I-40 – Módulo de Elasticidade

Continuando a aumentar as deformações e as tensões, termina o trecho reto na tensão limite de proporcionalidade (σ_p) e chega-se depois a um valor de tensão chamado de Tensão Limite de Elasticidade, indicada por σ_E . Se, para um valor de tensão não superior a σ_E , é retirado o esforço, a barra volta ao seu comprimento inicial l , desaparecendo as deformações ε . A isso se chama comportamento elástico do material.

A região compreendida entre as tensões $\sigma = 0$ e $\sigma = \sigma_E$ é a Região Elástica do diagrama.

A partir da tensão σ_E o material deixa o comportamento elástico e passa a ter um comportamento em que mesmo retirado o esforço sempre permanecerá uma deformação residual, e a barra não retorna ao seu comprimento inicial, l . Este comportamento é conhecido com comportamento plástico e a região correspondente no diagrama é a Região Plástica.

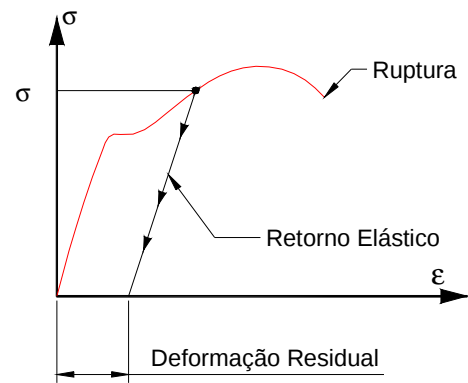


Figura I-41 – Região plástica

Na região plástica, conforme já mencionado, uma deformação residual sempre existirá após a retirada do esforço. Isto é, se solicitando o corpo de prova até um determinado ponto da região plástica e interrompendo o ensaio, retirando todo o esforço aplicado, este corpo manterá uma deformação permanente. Procedendo-se ao descarregamento de forma gradual, resultará uma reta de descarregamento aproximadamente paralela ao trecho inicial de carregamento, como foi mostrado na figura anterior.

Convém observar que antes do término da região elástica existe um pequeno trecho em que a relação σ/ε não é constante. Tem-se, assim, um trecho reto de comportamento elástico linear do material, até a tensão limite de proporcionalidade (σ_p), seguido de um trecho curvo, de comportamento elástico não-linear, até a Tensão Limite de Elasticidade (σ_E). A figura I-42, que se segue, corresponde a um trecho da figura I-41 e mostra essas tensões.

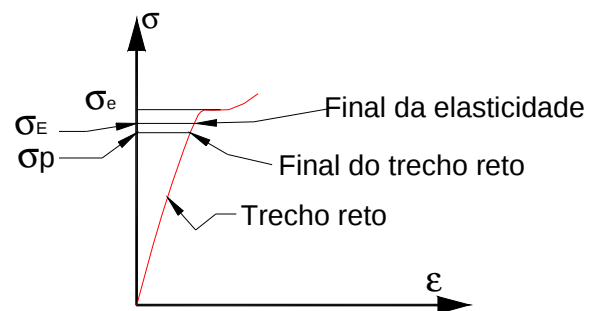


Figura I-42

Por terem valores muito próximos, nas aplicações é comum a unificação destas três tensões ($\sigma_p \cong \sigma_E \cong \sigma_e$), com

maior destaque para a tensão de escoamento σ_e .

Se o corpo de prova, após ter sido carregado até atingir a Região Plástica, e ter sido totalmente descarregado, for solicitado novamente, em um novo ensaio de tração, o diagrama tensão - deformação irá apresentar uma região elástica maior do que apresentava anteriormente, com valor das tensões σ_E maior que aquele do ensaio anterior, para a mesma barra. Este efeito é conhecido como encruamento.

Nota-se, também, que no material encruado a região plástica é menor e a tensão limite de ruptura é maior, quando comparadas com aquelas do ensaio do material no estado original.

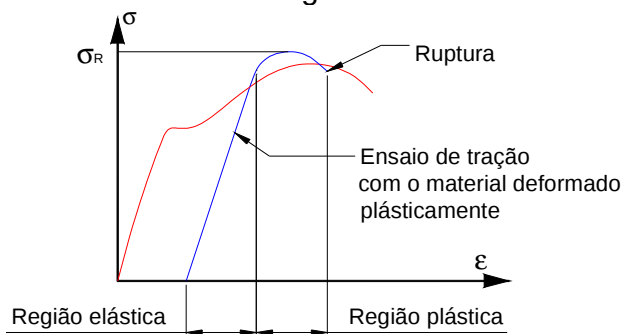


Figura I- 43

No diagrama Tensão - Deformação, o maior valor da tensão é conhecido como **tensão limite de ruptura (σ_R)**.

OBS:

- Um material somente elástico possui uma única função tensão – deformação para o carregamento e o descarregamento.

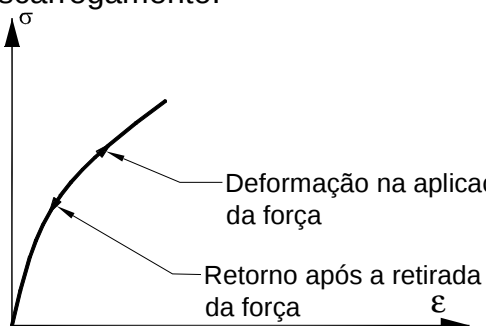


Figura I-44 – Material Elástico

- Um material somente linear mostra segmentos de reta distintos para o carregamento e o descarregamento.

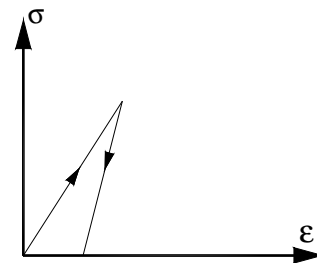


Figura I-45 – Material Linear

- O material linear que obedece a Lei de Hooke no carregamento e no descarregamento.

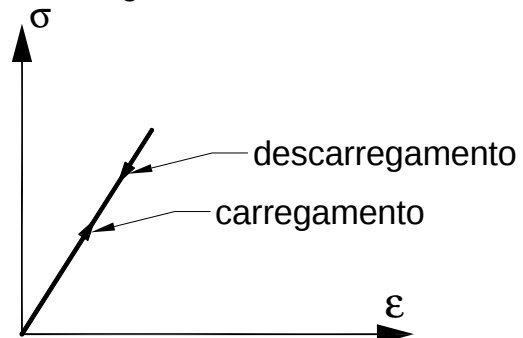


Figura I-46 – Material que respeita a Lei de Hooke

1.7.3 Variação na Distância

Nesse curso será considerada como válida, em todos os exemplos, a Lei de Hooke.

$$\sigma = E \times \varepsilon$$

de onde:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$$

Considerando valer l a distância entre duas seções de uma barra reta,

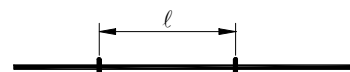


Figura I-47

a variação de distância entre as duas seções vale:

$$\Delta l = \int_0^l \varepsilon dx$$

fornecendo

Figura I-48

$$\Delta l = \int_0^l \frac{\sigma}{E} dx$$

como

$$\sigma = \frac{N}{A}$$

vem:

$$\Delta l = \int_0^l \frac{N}{A \times E} dx$$

O módulo de elasticidade é propriedade do material da barra e sendo um só este material, pode-se escrever:

$$\Delta l = \frac{1}{E} \times \int_0^l \frac{N}{A} dx$$

Quando a barra for prismática (seção transversal constante) e ao longo de seu comprimento não houver variação da força normal, a expressão acima fica:

$$\Delta l = \frac{N \times l}{E \times A}$$

1.8 Exemplos

3. Para a barra da figura I-47, determinar a variação de comprimento e variação de distância entre as seções S_1 e S_2 quando se sabe que $E = 200 \text{ GPa}$.

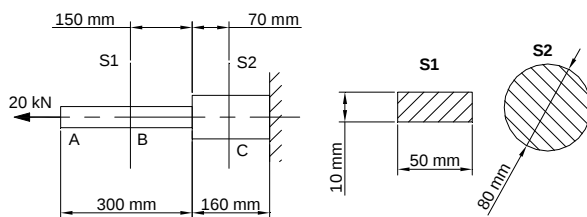
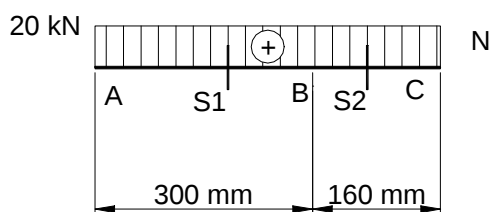


Figura I-47

Solução:

A figura I-48 representa o diagrama de esforços solicitantes para esta barra.



Pode-se determinar a variação de comprimento de uma barra solicitada por tração usando a expressão:

$$\Delta l = \frac{N \times l}{E \times A}$$

Como visto, esta expressão pode ser usada desde que não existam variações de esforço, material e área de seção transversal ao longo do comprimento l da barra.

Nesse exemplo, embora ao longo da barra, não ocorra a variação de esforço, ocorre uma mudança de seção em B, fazendo com que a barra tenha uma seção constante no trecho AB e outra seção constante no trecho BC.

Pode-se, então, determinar a variação de comprimento da barra através da soma algébrica das variações de comprimento dos dois trechos; isto é:

$$\Delta l = \left(\frac{N \times l}{E \times A} \right)_{AB} + \left(\frac{N \times l}{E \times A} \right)_{BC}$$

$$\Delta l = \frac{20 \text{ kN} \times 300 \text{ mm}}{200 \frac{\text{kN}}{\text{mm}^2} \times 5000 \text{ mm}^2} + \frac{20 \text{ kN} \times 160 \text{ mm}}{200 \frac{\text{kN}}{\text{mm}^2} \times \frac{\pi \times (80 \text{ mm})^2}{4}}$$

$$\Delta l = 6 \times 10^{-3} \text{ mm} + 3,2 \times 10^{-3} \text{ mm}$$

$$\Delta l = 9,2 \times 10^{-3} \text{ mm}$$

Para determinar a variação de distância entre S_1 e S_2 ($\Delta \mathcal{D}_{S1-S2}$) podemos usar o mesmo raciocínio:

$$\Delta \mathcal{D}_{S1-S2} = \left(\frac{N \times l}{E \times A} \right)_{S1-B} + \left(\frac{N \times l}{E \times A} \right)_{B-S2}$$

$$\Delta \mathcal{D}_{S1-S2} = \frac{20 \text{ kN} \times 160 \text{ mm}}{200 \frac{\text{kN}}{\text{mm}^2} \times 5000 \text{ mm}^2} + \frac{20 \text{ kN} \times 70 \text{ mm}}{200 \frac{\text{kN}}{\text{mm}^2} \times \frac{\pi \times (80 \text{ mm})^2}{4}}$$

$$\Delta \mathcal{D}_{S1-S2} = 3,2 \times 10^{-3} \text{ mm} + 1,4 \times 10^{-3} \text{ mm}$$

$$\Delta \mathcal{D}_{S1-S2} = 4,6 \times 10^{-3} \text{ mm}$$

Observar que estas variações (Δl e $\Delta \mathcal{D}$) são muito pequenas quando comparadas com as distâncias iniciais.

2 Dimensionamento

Dimensionar uma estrutura significa indicar a solução econômica para seu material e geometria, de modo que ela satisfaça os pré-requisitos estabelecidos para seu bom funcionamento.

A ruína da estrutura ocorre quando ela deixa de atender a um (ou mais) dos pré-requisitos estabelecidos; é usual associar ruína a deslocamentos, a tensões, ou a ambos.

Como exemplo, o deslocamento que normalmente ocorre na extremidade de uma asa de avião em vôo, é inaceitável para o piso de uma sala de aulas.

Em termos de tensão é comum diferenciar tipo de ruína, tais como:

- **Ruptura**:- onde a desagregação do material provoca divisão na estrutura.
- **Escoamento**:- já caracterizado no ensaio de tração
- **Flambagem**:- situação em que esforços provocam alterações na geometria da estrutura resultando mudança em seu comportamento

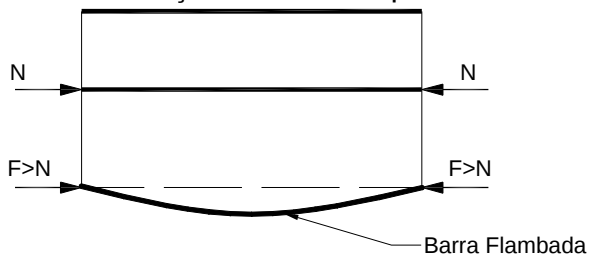


Figura I-49

- **Fadiga**:- causada por oscilações na intensidade dos esforços

- **Fluência**:- caracterizada pelo crescimento dos deslocamentos, com esforços constantes, em prazos longos.

- **Etc.**

As tensões de ruína ($\sigma_{\text{Ruína}}$ e $\tau_{\text{Ruína}}$, sempre positivas) estão associadas aos fenômenos descritos, valendo:

σ_R e τ_R para a ruptura;

σ_e e τ_e , para o escoamento;

σ_{fl} e τ_{fl} , para a flambagem;

etc.

2.1 Tensões Admissíveis

As tensões admissíveis ($\bar{\sigma}$ e $\bar{\tau}$) são usadas como limites superiores para as tensões que podem ocorrer numa estrutura; elas (tensões admissíveis) são sempre menores que as tensões de ruína e obtidas com a divisão destas últimas (ruína) por um número maior que um, chamado de coeficiente de segurança (Δ)

$$\bar{\sigma} = \frac{\sigma_{\text{ruína}}}{\Delta} \quad \bar{\tau} = \frac{\tau_{\text{ruína}}}{\Delta}$$

Por exemplo, a tensão normal admissível ao escoamento é:

$$\bar{\sigma} = \frac{\sigma_e}{\Delta}$$

Assim, o dimensionamento, para a tensão normal, deve ser feito de acordo com a equação:

$$|\sigma| = \left| \frac{N}{A} \right| \leq \bar{\sigma}$$

2.2 Comentários sobre o Coeficiente de segurança

A adoção de um coeficiente de segurança γ destina-se a cobrir incertezas (possíveis pequenas variações) de diversos parâmetros do projeto, como dimensões das peças, características dos materiais, carregamentos, etc., uma vez que não é possível estabelecer exatamente para tais parâmetros na prática.

O coeficiente de segurança, porém, não deverá, jamais, cobrir erro de cálculo ou de construção.

Quanto maior o valor de γ adotado, maiores serão as áreas das seções transversais obtidas para as peças, e menores as tensões nos pontos da estrutura, que implicam, por sua vez, em maior custo (gasto de material) e menor probabilidade de ocorrência de ruína.

Nota-se, daí, que custo e risco de ruína variam inversamente um com o outro, isto é, diminuir o risco implica em aumentar o custo.

Deve-se salientar que não existe a possibilidade de projetar e construir uma estrutura com risco de ruína igual a zero.

Por isso, o coeficiente de segurança γ deve ser suficientemente grande para que o risco de ruína seja menor ou igual ao risco considerado aceitável pelo ser humano, sem atingir um valor que implique em um custo que inviabilize o projeto.

Dada a grande importância do coeficiente de segurança, valores mínimos de γ foram estimados, a partir da Estatística e do conhecimento histórico do comportamento de estruturas já construídas. Seus valores foram fixados pelas normas técnicas. Ou seja, é dever do profissional respeitar esses valores mínimos.

Em casos especiais, onde a ocorrência de ruína da estrutura pode implicar em danos, ao ser humano, significativamente maior que aqueles decorrentes da ruína das estruturas usuais, valores maiores de coeficiente de

segurança que aqueles de norma devem ser utilizados, a critério do profissional.

2.3 Tensões Extremas

Nos diversos planos das seções transversais encontra-se a maior tensão normal de tração ($\max\{\sigma\}$), o maior módulo das tensões normais de compressão ($\min\{\sigma\}$) e a maior tensão de cisalhamento ($\max\{\tau\}$) em módulo. Estas são as chamadas tensões extremas.

2.4 Exemplos

- Determinar as tensões extremas que irão atuar na barra da figura I-50; cujas seções transversais de seus trechos prismáticos, estão representadas na figura I-51.

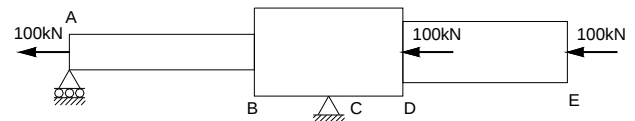


Figura I-50

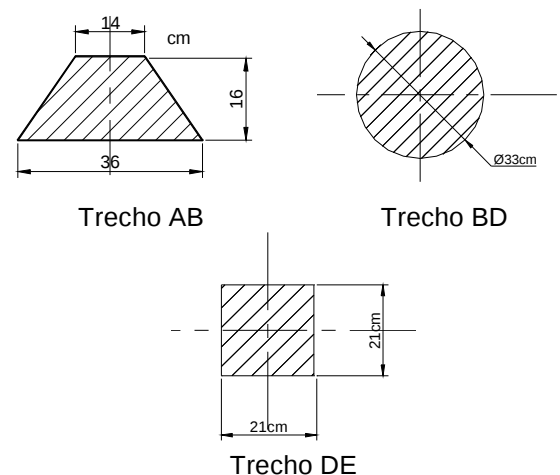


Figura I-51 – Seções transversais da barra

Solução:

Determinadas as reações de apoio, é possível desenhar os diagramas dos esforços solicitantes. Neste exemplo, só existe força normal.

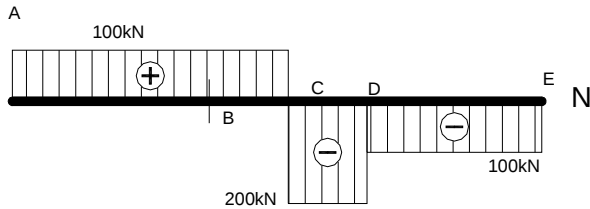


Figura I-52 – Diagrama de forças normais da barra

Para determinar as tensões extremas será estudado cada trecho da barra.

• Trecho AB

Neste trecho todas as seções transversais estão sujeitas à mesma força normal de tração de 100kN. A seção transversal deste trecho tem área igual a:

$$A = \frac{36+14}{2} \times 16 \text{ cm}^2$$

$$A = 400 \text{ cm}^2 = 4 \times 10^4 \text{ mm}^2$$

Para estas seções, a tensão extrema fica:

$$\sigma_{AB} = \frac{100.000 \text{ N}}{4 \times 10^4 \text{ mm}^2}$$

$$\sigma_{AB} = 2,5 \text{ MPa}$$

• Trecho BD

Neste trecho algumas seções transversais estão sujeitas a uma força normal de tração de 100kN e outras a uma de compressão de 200kN. A seção transversal deste trecho tem área igual a:

$$A = \frac{\pi \times (33 \text{ cm})^2}{4} = 855,3 \text{ cm}^2 = 8,55 \times 10^4 \text{ mm}^2$$

Pode-se então determinar as tensões extremas:

$$\sigma_{BD} = \frac{100.000 \text{ N}}{8,55 \times 10^4 \text{ mm}^2}$$

$$\sigma_{BD} = 1,17 \text{ MPa} \text{ no trecho tracionado}$$

$$\sigma'_{BD} = \frac{-200.000 \text{ N}}{8,55 \times 10^4 \text{ mm}^2}$$

$$\sigma'_{BD} = -2,34 \text{ MPa} \text{ no trecho comprimido}$$

• Trecho DE

Neste trecho todas as seções transversais estão sujeitas a uma força normal de compressão de valor igual a 100kN. A seção transversal deste trecho tem área igual a:

$$A = 21 \times 21 = 441 \text{ cm}^2 = 4,41 \times 10^4 \text{ mm}^2$$

Para estas seções a tensão extrema vale:

$$\sigma_{DE} = \frac{-100.000 \text{ N}}{4,41 \times 10^4 \text{ mm}^2}$$

$$\sigma_{DE} = -2,27 \text{ MPa}$$

Com estes resultados as tensões extremas da barra são:

$$\text{máx}\{\sigma\} = 2,5 \text{ MPa}$$

$$\text{mín}\{\sigma\} = 2,34 \text{ MPa}$$

2.5 Dimensionar

Nesta fase de conhecimento, dimensionar significa respeitar com economia:

- Tensões extremas $\leq$ Tensões Admissíveis
- Deslocamentos $\leq$ Valor pré-fixado.

OBS:

Chama-se verificação da estrutura à obtenção dos parâmetros envolvidos no dimensionamento, com a estrutura já executada.

2.6 Exemplos

5. Uma barra prismática de seção circular é solicitada por forças normais, como mostra a figura I-53. Determinar o diâmetro desta barra, para que ela trabalhe com segurança igual a 2 à ruptura, quando se sabe que o material com o qual ela será construída possui:

$\sigma_R = 120 \text{ MPa}$ na tração e
 $\sigma_R = 200 \text{ MPa}$ na compressão

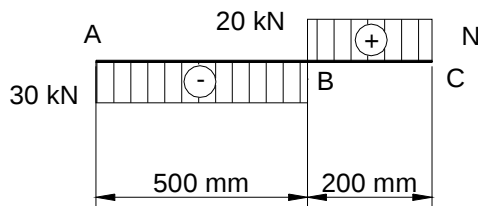


Figura I-53

Solução:

A análise da barra mostra que no trecho AB a força normal possui valor e sinal diferente da encontrada no trecho BC. Assim, se devem dimensionar duas seções, uma para o trecho tracionado e uma para o trecho comprimido.

• Trecho Tracionado

$$\frac{N}{A} \leq \frac{\sigma_R}{\gamma} \rightarrow \frac{20000N}{\frac{\pi \times d^2}{4}} \leq \frac{120 \frac{N}{\text{mm}^2}}{2} \rightarrow \boxed{d \geq 20,6 \text{ mm}}$$

• Trecho Comprimido

$$\left| \frac{N}{A} \right| \leq \left| \frac{\sigma_R}{\gamma} \right| \rightarrow \frac{30000N}{\frac{\pi \times d^2}{4}} \leq \frac{200 \frac{N}{\text{mm}^2}}{2} \rightarrow \boxed{d \geq 19,5 \text{ mm}}$$

Como a barra é prismática, o mínimo diâmetro que satisfaz a condição de esforço e economia é de 20,6 mm.

6. Uma barra prismática com seção circular e 10m de comprimento é solicitada por uma força de 10 tf, como mostra a figura I-54. Conhecidas as características de seu material, determinar, com segurança igual a 1,5 ao escoamento, o diâmetro da seção nas seguintes condições:

- Sem considerar o peso próprio
- Considerando o peso próprio.

$$\sigma_e = 1500 \text{ kgf/cm}^2 \quad \sigma_R = 2000 \text{ kgf/cm}^2 \quad \gamma = 7,8 \times 10^3 \text{ kgf/m}^3$$

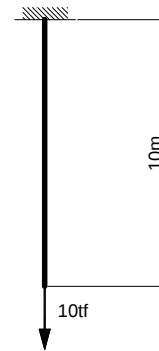


Figura I-54

Solução:

a. Sem considerar o peso próprio

Neste caso o diagrama de forças normais para a barra fica:

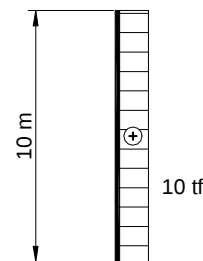


Figura I-55 – Diagrama de Força Normal sem considerar o peso próprio

Como a barra é prismática e não existe variação da força normal ao longo de seu comprimento, para qualquer ponto de qualquer seção, pode-se escrever:

$$\sigma = \frac{N}{A} = \text{máx}\{\sigma\}$$

$$\text{máx}\{\sigma\} \leq \frac{\sigma_e}{\gamma} \rightarrow \frac{10000 \text{ kgf}}{\frac{\pi \times d^2}{4}} \leq \frac{1000 \frac{\text{kgf}}{\text{cm}^2}}{1,5} \rightarrow$$

$$\boxed{d = 4,4 \text{ cm}}$$

b. Considerando o peso próprio

Neste caso o diagrama de forças normais para a barra fica:

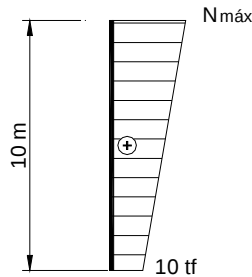


Figura I-56 – Diagrama de Força Normal considerando o peso próprio

Nesta situação, a seção mais solicitada é aquela junto ao engastamento, onde a força normal atuante é

$$N_{\text{máx}} = 10 \text{ tf} + \gamma \times V_{\text{ol}}$$

onde V_{ol} é o volume da barra.

Como a barra é prismática, é possível escrever seu volume como:

$$V_{\text{ol}} = A \times L$$

A = área da seção transversal
 L = comprimento da barra

Assim, a força normal que atua na seção junto ao engastamento pode ser escrita como:

$$N_{\text{máx}} = 10 \text{ tf} + \gamma AL$$

Desta forma o dimensionamento deve ser feito:

$$N_{\text{máx}} = 10000 \text{ kgf} + \gamma \times \frac{\pi \times d^2}{4} \times 10 \text{ m}$$

$$\text{máx}\{\sigma\} = \frac{N_{\text{máx}}}{\frac{\pi \times d^2}{4}} \leq \frac{\sigma_e}{\gamma} \rightarrow$$

$$\frac{10000 \text{ kgf} + \gamma \times \frac{\pi \times d^2}{4} \times 10 \text{ m}}{\frac{\pi \times d^2}{4}} \leq \frac{1500 \frac{\text{kgf}}{\text{cm}^2}}{1,5}$$

$$\frac{10000 \text{ kgf}}{\frac{\pi \times d^2}{4}} + 7,8 \times 10^3 \frac{\text{kgf}}{\text{m}^3} \times 10 \text{ m} \leq \frac{1500 \frac{\text{kgf}}{\text{cm}^2}}{1,5}$$

$$\frac{10000 \text{ kgf}}{\frac{\pi \times d^2}{4}} + 7,8 \times 10^{-3} \frac{\text{kgf}}{\text{cm}^3} \times 10 \times 10^2 \text{ cm} \leq \frac{1500 \frac{\text{kgf}}{\text{cm}^2}}{1,5}$$

$$d \cong 4,4 \text{ cm}$$

Observar que neste caso, o peso próprio do material não tem significado para o dimensionamento.

7. Determinar os diâmetros que devem ter as barras prismáticas da figura I-57, a fim de que não sejam ultrapassadas as tensões admissíveis do material.

$$\bar{\sigma} = 100 \text{ MPa (tração)}$$

$$\bar{\sigma} = 150 \text{ MPa (compressão)}$$

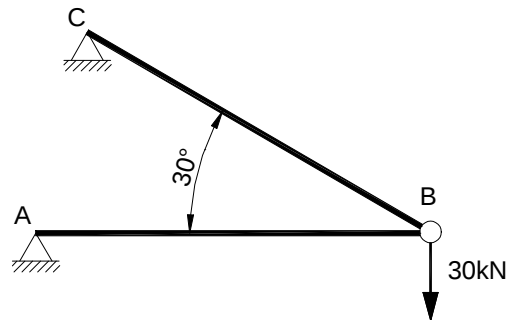


Figura I-57

Solução:

Inicialmente, se deve determinar a força normal que atua em cada barra desta treliça. Para tal, estuda-se o equilíbrio do ponto B.

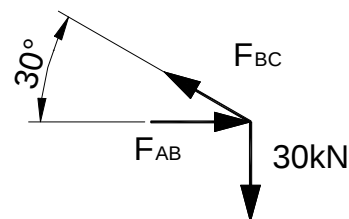


Figura I-58 – Equilíbrio do nó B.

$$\sum FV = 0$$

$$F_{BC} \times \sin 30^\circ = 30 \text{ kN}$$

$$F_{BC} = 60 \text{ kN}$$

$$\sum FH = 0$$

$$F_{BC} \times \cos 30^\circ = F_{AB}$$

$$F_{AB} = 52 \text{ kN}$$

Com estes resultados, pode ser traçado o diagrama de forças normais para as barras:

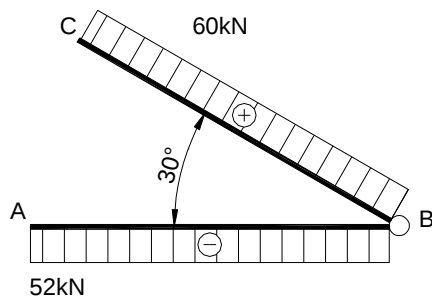


Figura I-59 – Forças Normais nas barras.

De acordo com este diagrama, a força normal em cada barra fica:

$$N_{AB} = 60 \text{ kN} \quad N_{BC} = -52 \text{ kN}$$

Com estas forças e sabendo-se que as barras são prismáticas, se pode escrever:

A barra BC é tracionada.

$$\text{máx}\{\sigma\} = \frac{N}{A} \leq \bar{\sigma} \rightarrow \frac{60000 \text{ N}}{\frac{\pi \times d_{BC}^2}{4}} \leq 100 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

$$d_{BC} = 28 \text{ mm}$$

A barra AB é comprimida:

$$\text{mín}\{\sigma\} = \frac{N}{A} \leq \bar{\sigma} \rightarrow \frac{52000 \text{ N}}{\frac{\pi \times d_{AB}^2}{4}} \leq 150 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

$$d_{AB} = 21 \text{ mm}$$

8. Um elevador predial tem uma capacidade de carga igual a 640kgf e SUA cabina pesa 260kgf. O motor elétrico aciona o sistema mostrado na figura I-60, promovendo a subida ao enrolar o cabo no tambor; a descida ocorre com o desenrolar.

Este equipamento trabalha num edifício residencial de quinze pavimentos com velocidade média de 100m/min. O comprimento desenrolado do cabo, quando ele serve o andar mais baixo, é de 48m e ele vale 3m quando no andar mais elevado.

Determinar o diâmetro deste cabo para que ele trabalhe com segurança igual a três em relação ao escoamento e para que o degrau entre os pisos do andar e da cabina, parada em qualquer andar, não exceda 10 mm.

$$\sigma_R = 5600 \text{ kgf/cm}^2 \quad \sigma_e = 2400 \text{ kgf/cm}^2 \quad E = 2,1 \times 10^6 \text{ kgf/cm}^2$$

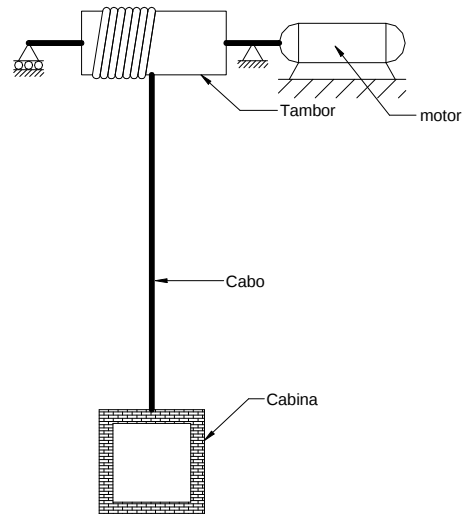


Figura I-60

Solução:

O cabo de aço desenrolado pode ser considerado como uma barra prismática de seção transversal circular.

Neste exemplo existem duas condições a serem satisfeitas:

- Tensões extremas $\leq \bar{\sigma}_e$
- Deslocamento $\leq 10 \text{ mm}$.

Condição de tensão

A tensão admissível vale:

$$\bar{\sigma} = \frac{\sigma_e}{\gamma} = \frac{2400}{3} = 800 \text{ kgf/cm}^2$$

A maior carga que atua no cabo é o resultado da soma entre a capacidade de carga e o peso próprio do elevador (desprezando o peso próprio do cabo)

$$N = 640 \text{ kgf} + 240 \text{ kgf} = 900 \text{ kgf}$$

Sendo d o diâmetro da seção transversal do cabo, vem:

$$\text{máx}\{\sigma\} = \frac{N}{A} \leq \bar{\sigma} \rightarrow \frac{N}{\frac{\pi \times d^2}{4}} \leq \bar{\sigma} \rightarrow$$

$$\frac{4 \times N}{\pi \times d^2} \leq \bar{\sigma}$$

$$d \geq \sqrt{\frac{4 \times N}{\pi \times \bar{\sigma}}} \rightarrow d \geq \sqrt{\frac{4 \times 900 \text{ kgf}}{\pi \times 800 \text{ kgf/cm}^2}}$$

$$\boxed{d \geq 1,2 \text{ cm}}$$

Condição de deslocamento.

Para satisfazer esta condição, se deve lembrar que o degrau na parada é consequência da variação de posição provocada pela entrada ou saída de carga no elevador; assim, o maior degrau acontece com a aplicação da carga máxima permitida (640kgf). Desta forma, a força normal que deve ser usada para a satisfação dessa condição, é esta capacidade de carga do elevador.

Lembrando que, aumentando o comprimento cresce a variação no comprimento provocada pela força normal, se faz necessário usar o comprimento máximo desenrolado (48m) para satisfazer esta condição.

$$\Delta \ell = \frac{N \times \ell}{E \times A} \leq 10 \text{ mm} \rightarrow$$

$$\frac{640 \text{ kgf} \times 48 \text{ m}}{2,1 \times 10^6 \text{ kgf/cm}^2 \times \frac{\pi \times d^2}{4}} \leq 10 \text{ mm}$$

$$\frac{4 \times 640 \text{ kgf} \times 4800 \text{ cm}}{2,1 \times 10^6 \text{ kgf/cm}^2 \times \pi \times d^2} \leq 1 \text{ cm}$$

$$d \geq \sqrt{\frac{4 \times 640 \text{ kgf} \times 4800 \text{ cm}}{2,1 \times 10^6 \text{ kgf/cm}^2 \times \pi \times 1 \text{ cm}}}$$

$$\boxed{d \geq 1,4 \text{ cm}}$$

Como o diâmetro do cabo deve satisfazer as duas condições, a solução econômica é:

$$\boxed{d = 1,4 \text{ cm}}$$

Notar que com este diâmetro o coeficiente de segurança do cabo passa a valer:

$$\frac{4 \times N}{\pi \times d^2} = \frac{\sigma_e}{\gamma} \rightarrow \gamma = \frac{\sigma_e \times \pi \times d^2}{4 \times N}$$

$$\gamma = \frac{2400 \text{ kgf/cm}^2 \times \pi \times (1,4 \text{ cm})^2}{4 \times 900 \text{ kgf}}$$

$$\boxed{\gamma = 4,1}$$

9. A barra prismática da figura I-61, tem sua seção transversal igual a um triângulo equilátero com 25 mm de lado e foi construída com um material que possui $E = 84 \text{ GPa}$. Para esta barra, determinar:

- As tensões extremas
- Sua variação de comprimento
- O deslocamento horizontal do apoio móvel
- O deslocamento horizontal de cada extremidade.

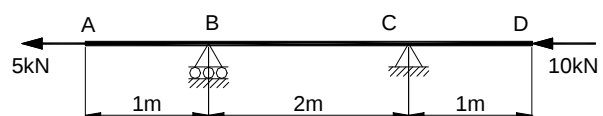


Figura I-61

Solução:

Antes de iniciar, propriamente a solução, se deve calcular a área da seção transversal. Chamando de **a** o lado do triângulo, se tem:

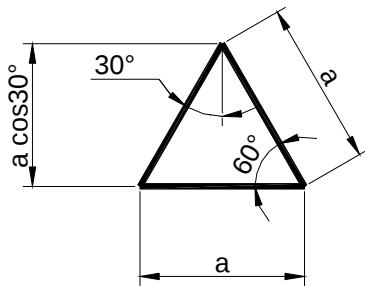


Figura I-62 – Seção transversal da barra

$$A = \frac{a^2 \times \cos 30^\circ}{2} = \frac{(25\text{mm})^2 \times \cos 30^\circ}{2} = 271\text{mm}^2$$

Para resolver o problema, devem ser determinadas as reações de apoio e construídos os diagramas de esforços solicitantes. No caso do problema o único esforço é Força Normal cujo diagrama fica:

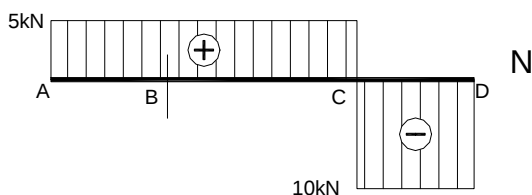


Figura I-63 – Diagrama de Forças Normais

Pelo diagrama se tem:

Trecho AC: $N=5\text{kN}$ Trecho CD: $N=-10\text{kN}$

a. Tensões Extremas

As tensões extremas ficam:

$$\max\{\sigma\} = \frac{5.000\text{N}}{271\text{mm}^2} \rightarrow \boxed{\max\{\sigma\} = 18,45\text{MPa}}$$

$$\min\{\sigma\} = \frac{10.000\text{N}}{271\text{mm}^2} \rightarrow \boxed{\min\{\sigma\} = 36,90\text{MPa}}$$

b. Variação de comprimento da barra

A variação de comprimento da barra é igual à soma algébrica entre a variação de comprimento do trecho AC e a variação de comprimento do trecho CD. Assim, pode-se escrever:

$$\Delta\ell = \left(\frac{N \times \ell}{E \times A} \right)_{AC} + \left(\frac{N \times \ell}{E \times A} \right)_{CD}$$

$$\Delta\ell = \frac{5\text{kN} \times 3000\text{mm}}{84 \frac{\text{kN}}{\text{mm}^2} \times 271\text{mm}^2} + \frac{-10\text{kN} \times 1000\text{mm}}{84 \frac{\text{kN}}{\text{mm}^2} \times 271\text{mm}^2}$$

$$\boxed{\Delta\ell = 0,22\text{mm}}$$

OBS:

O sinal positivo obtido para $\Delta\ell$ indica que a barra sofre um aumento em seu comprimento original.

c. Deslocamento horizontal do apoio móvel

É possível observar que na barra da figura I-61, a única seção que não sofre alteração de posição é a seção C colocada no apoio simples fixo. Assim, o deslocamento do apoio móvel é igual ao deslocamento relativo entre a seção C (onde se encontra o apoio fixo) e a seção B (onde se encontra o apoio móvel), ou seja, é a variação na distância entre as seções B e C; isto é

$$\mathcal{D}_B = \Delta\ell_{BC} = \left(\frac{N \times \ell}{E \times A} \right)_{BC}$$

$$\mathcal{D}_B = \frac{5\text{kN} \times 2000\text{mm}}{84 \frac{\text{kN}}{\text{mm}^2} \times 271\text{mm}^2} \rightarrow \boxed{\mathcal{D}_B = 0,44\text{mm}}$$

Como o sinal do deslocamento foi positivo, ele indica que ocorre um afastamento entre as seções. Como a seção C é fixa e a seção B está a sua

esquerda, pode-se afirmar que a seção B (e, portanto o apoio móvel) se desloca para este lado esquerdo.

d. Deslocamento horizontal de cada extremidade.

Como a seção C é fixa, cada extremidade mostra um deslocamento igual à variação de sua distância ao apoio fixo (C). Assim,

$$\mathcal{D}_A = \Delta \ell_{AC} = \left(\frac{N \times \ell}{E \times A} \right)_{AC}$$

$$\mathcal{D}_A = \frac{5 \text{ kN} \times 3000 \text{ mm}}{84 \frac{\text{kN}}{\text{mm}^2} \times 271 \text{ mm}^2} \rightarrow$$

$$\mathcal{D}_A = 0,66 \text{ mm}$$

O sinal positivo mostra um afastamento entre as seções e como a seção A está a esquerda de C, ele indica um deslocamento à esquerda.

Da mesma forma,

$$\mathcal{D}_D = \Delta \ell_{CD} = \left(\frac{N \times \ell}{E \times A} \right)_{CD}$$

$$\mathcal{D}_D = \frac{-10 \text{ kN} \times 1000 \text{ mm}}{84 \frac{\text{kN}}{\text{mm}^2} \times 271 \text{ mm}^2} \rightarrow$$

$$\mathcal{D}_D = -0,44 \text{ mm}$$

O sinal negativo mostra uma aproximação entre as seções e como a seção D está a direita de C, ele indica um deslocamento à esquerda.

10. A treliça da figura I-64 é constituída por barras prismáticas com seção transversal em forma de anel circular, como se mostra na figura I-65. Conhecidas as tensões de ruína do material, determinar a segurança com que a treliça trabalha quando lhe é aplicada uma carga de 20kN no nó B.

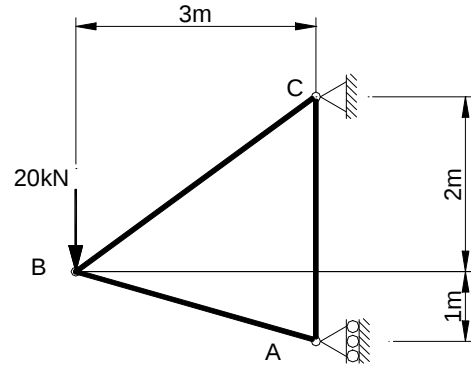


Figura I-64

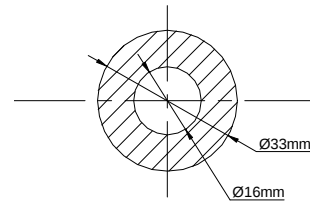


Figura I-65 – Seção transversal das barras da treliça.

$\sigma_{\text{Ruína}} = 250 \text{ MPa}$ na tração

$\sigma_{\text{Ruína}} = 100 \text{ MPa}$ na compressão

Solução:

A solução do problema passa, pela determinação das forças normais que atuam em cada barra da treliça. Para tal, se deve, inicialmente, determinar as reações de apoio. Estas reações são as forças aplicadas nos nós A e C da figura I-66

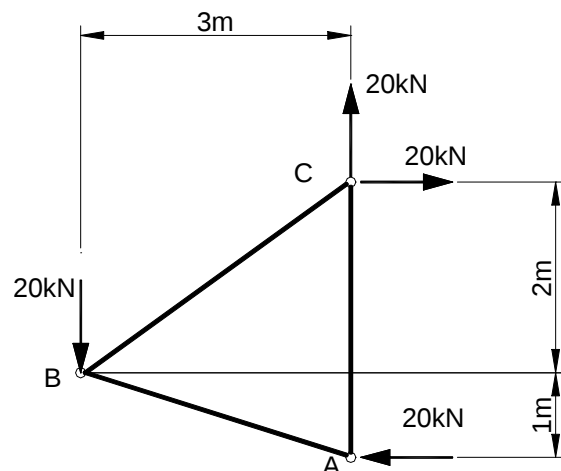


Figura I-66 – Treliça com as reações de apoio e força aplicada.

Resolvendo a treliça, são determinadas as forças em cada barra:

Barra	Força Normal (kN)
AB	-21,1
BC	+24,0
AC	+6,7

A área (A) da seção transversal é igual a:

$$A = \frac{\pi}{4} \times [(33\text{mm})^2 - (16\text{mm})^2] = 654\text{mm}^2$$

Com a força normal de cada barra e a área da seção transversal, se obtém os coeficientes de segurança para as três barras:

Barra AB (compressão)

$$\frac{|N_{AB}|}{A} = \frac{\sigma_{Ruína}}{\gamma} \rightarrow \frac{21.100\text{N}}{654\text{mm}^2} = \frac{100\text{MPa}}{\gamma} \rightarrow$$

$$\gamma = 3,1$$

Barra BC (tração)

$$\frac{N_{BC}}{A} = \frac{\sigma_{Ruína}}{\gamma} \rightarrow \frac{24.000\text{N}}{654\text{mm}^2} = \frac{250\text{MPa}}{\gamma} \rightarrow$$

$$\gamma = 6,8$$

Barra AC (tração)

$$\frac{N_{AC}}{A} = \frac{\sigma_{Ruína}}{\gamma} \rightarrow \frac{6.700\text{N}}{654\text{mm}^2} = \frac{250\text{MPa}}{\gamma} \rightarrow$$

$$\gamma = 24,4$$

Para a estrutura o coeficiente de segurança é o menor entre os três encontrados; isto é:

$$\gamma = 3,1$$

11. Foi solicitado a um engenheiro determinar o cabo de sustentação da barra horizontal da figura I-67, que é mantida em equilíbrio por meio do cabo e de um apoio simples fixo. Assim, determinar:

- O diâmetro deste cabo (d) para que ele trabalhe com segurança igual a 2 em relação ao escoamento.
- O deslocamento da extremidade esquerda da barra ($\mathcal{D}_B$) quando o cabo possui o diâmetro encontrado no item anterior.

$\sigma_R = 620\text{ MPa}$; $\sigma_e = 430\text{ MPa}$; $E = 210\text{ GPa}$.

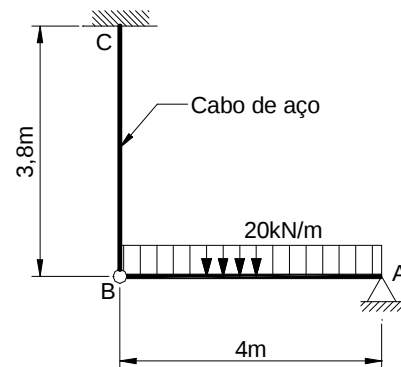


Figura I-67

Solução:

Inicialmente, se determina as reações de apoio para a estrutura. Lembrando que os esforços solicitantes nas seções unidas por uma articulação podem ser força normal e força cortante e que um cabo só possui resistência às forças normais de tração; nesse exemplo, podemos fazer a seguinte representação.

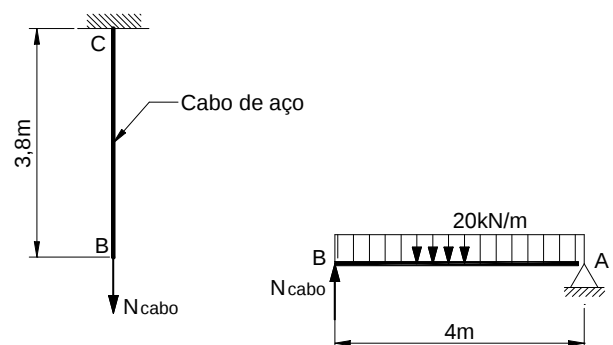


Figura I-68

A força normal do cabo (N_{cabo}) pode ser determinada pela condição de equilíbrio $\sum M(\text{em A}) = 0$.

Tem-se então:

$$N_{\text{cabo}} \times 4\text{m} = \left(20 \frac{\text{kN}}{\text{m}} \times 4\text{m} \right) \times \frac{4\text{m}}{2}$$

$$\boxed{N_{\text{cabo}} = 40\text{kN}}$$

a. Determinação do diâmetro do cabo (d)

Como o cabo é uma barra prismática; quando se despreza seu peso próprio, se pode escrever:

$$\text{máx}\{\sigma\} = \frac{N_{\text{cabo}}}{A} \leq \bar{\sigma}$$

onde $\bar{\sigma} = \frac{\sigma_e}{\gamma} = \frac{430}{2} = 215\text{MPa}$.

Assim,

$$\frac{N_{\text{cabo}}}{\frac{\pi \times d^2}{4}} \leq \bar{\sigma} \Rightarrow d \geq \sqrt{\frac{4 \times N_{\text{cabo}}}{\pi \times \bar{\sigma}}} \Rightarrow$$

$$d \geq \sqrt{\frac{4 \times 40000\text{N}}{\pi \times 215 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}}}$$

$$\boxed{d \geq 15,4\text{mm}}$$

b. Deslocamento da Extremidade esquerda da barra ($\mathcal{D}_B$)

Como a extremidade esquerda da barra e a extremidade inferior do cabo se unem em B, e o cabo está suspenso pela sua outra extremidade; o deslocamento da extremidade esquerda da barra é igual à variação de comprimento do cabo, Isto é:

$$\boxed{\mathcal{D}_B = \Delta \ell_{\text{cabo}} = \left(\frac{N \times \ell}{E \times A} \right)_{\text{cabo}}}$$

$$\mathcal{D}_B = \frac{40000\text{N} \times 3800\text{mm}}{210 \times 10^3 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \times \frac{\pi \times (15,4\text{mm})^2}{4}}$$

$$\boxed{\mathcal{D}_B = 3,9\text{mm}}$$

12. Ainda com relação ao exemplo 11; como no estoque existia um cabo com 16 mm de diâmetro, foi solicitado ao engenheiro Verificar se o cabo é seguro, para um coeficiente de segurança ao escoamento igual a 1,4, quando a carga aplicada na barra passa a ser 30 kN/m.

Solução:

Nesta situação, a força normal no cabo é:

$$N_{\text{cabo}} \times 4\text{m} = \left(30 \frac{\text{kN}}{\text{m}} \times 4\text{m} \right) \times \frac{4\text{m}}{2}$$

$$\boxed{N_{\text{cabo}} = 60\text{kN}}$$

A área da seção transversal do cabo é:

$$A = \frac{\pi \times d^2}{4} = \frac{\pi \times (16\text{mm})^2}{4} = 201\text{mm}^2$$

Assim, se pode escrever:

$$\frac{N_{\text{cabo}}}{A} = \frac{\sigma_e}{\gamma} \Rightarrow \frac{60.000\text{N}}{201\text{mm}^2} = \frac{430\text{MPa}}{\gamma}$$

$$\boxed{\gamma = 1,45}$$

Como o coeficiente de segurança encontrado é menor que requerido, se pode afirmar que o cabo é seguro.

OBS.:

Embora o coeficiente de segurança encontrado seja maior que um e maior que o estipulado, esta situação é menos segura que a do exemplo 11, pois, naquele

exemplo o coeficiente de segurança é igual a 2.

13. Para o exemplo 12, foi solicitado verificar se o cabo é seguro para um coeficiente de segurança igual a 2,5 à ruptura.

Solução:

Para resolver o problema, basta igualar a tensão desenvolvida pela força normal do cabo (N_{cabo}) à tensão admissível à ruptura; isto é:

$$\frac{N_{\text{cabo}}}{A} = \frac{\sigma_R}{s}$$

$$\frac{60.000\text{N}}{201\text{mm}^2} = \frac{620\text{MPa}}{s} \rightarrow s = 2,1$$

OBS:

Embora o coeficiente de segurança encontrado seja um número maior que um, ele não atende à condição de dimensionamento já que, ele é menor que o estipulado para o funcionamento da estrutura.

Note-se, também, que das três situações apresentadas (exemplos 11; 12 e 13) a situação do exemplo 12 é a que apresenta o menor coeficiente de segurança.

14. Por uma necessidade de trabalho, é aplicada, junto com a carga distribuída de 20kN/m, uma carga concentrada de 70 kN em uma seção distante 1m da extremidade esquerda; como mostra a figura I-69. Para esta situação, se solicita:

- Determinar o coeficiente de segurança do cabo em relação ao escoamento e em relação à ruptura.
- Verificar se o cabo é seguro.

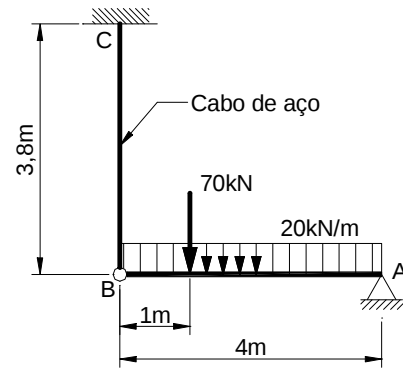


Figura I-69

Solução:

Faz-se necessário encontrar a força que irá atuar no cabo nesta nova situação. Esta força é determinada pela condição de equilíbrio $\sum M(\text{em A}) = 0$.

$$N_{\text{cabo}} \times 4\text{m} = \left(20 \frac{\text{kN}}{\text{m}} \times 4\text{m} \right) \times \frac{4\text{m}}{2} + 70\text{kN} \times 3\text{m}$$

$$N_{\text{cabo}} = 92,5\text{kN}$$

A determinação dos coeficientes de segurança, como já foi visto, será determinada por:

$$\frac{N_{\text{cabo}}}{A} = \frac{\sigma_e}{s} \quad \text{Para o escoamento}$$

$$\frac{92.500\text{N}}{201\text{mm}^2} = \frac{430\text{MPa}}{s}$$

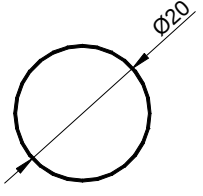
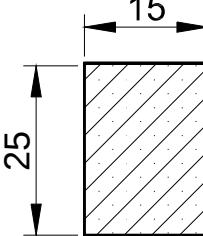
$$s = 0,93$$

Não é preciso examinar a ruptura, pois este resultado ($s=0,93$) mostra o cabo sem condições de trabalhar.

Exercícios

1. Determinar a máxima carga P que se pode aplicar na barra da figura I-70 para que o coeficiente de segurança seja 2 ao escoamento e para que a variação de comprimento da barra não ultrapasse 2 mm.

Dados:

Trecho	Seção Transversal	σ_R (MPa)	σ_e (MPa)	E (GPa)
A - B		300	240	200
B - C		500	340	70

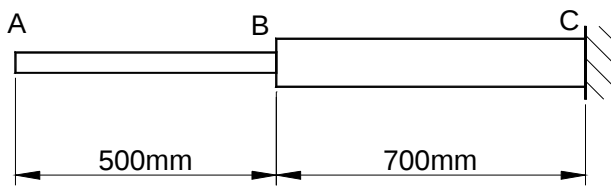


Figura I-70

Resposta:

$$P_{\max} = 3,2 \times 10^4 \text{ N}$$

2. A barra rígida da figura I-71 é apoiada em uma de suas extremidades e é mantida em equilíbrio por um fio vertical colocado na seção B desta barra. Determinar a área da seção transversal do fio (A) para que o coeficiente de segurança à ruptura seja igual a 3 e para que o deslocamento vertical do ponto D não ultrapasse 2 mm.

Dados:

$$\sigma_R = 4200 \text{ kgf/cm}^2 \quad E = 2,1 \times 10^6 \text{ kgf/cm}^2$$

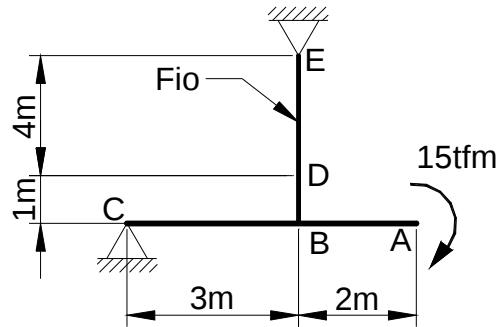


Figura I-71

Resposta:

$$A = 4,8 \text{ cm}^2$$

3. Determinar o coeficiente de segurança da estrutura mostrada na figura I-72, quando as barras são idênticas.

Dados

$\sigma_R = 120 \text{ MPa}$ (tração)	$\sigma_R = 80 \text{ MPa}$ (compressão)	$A = 600 \text{ mm}^2$
--	---	------------------------

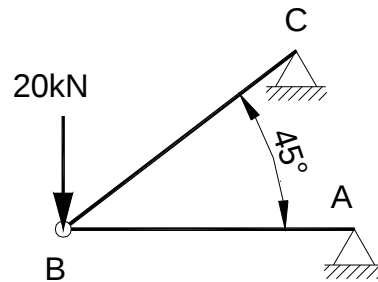


Figura I-72

Resposta

$$s = 2,4$$