

# EQUILÍBRIO INTERNO DE ESTRUTURAS

## FORÇAS AXIAL, CORTANTE E MOMENTO FLETOR:

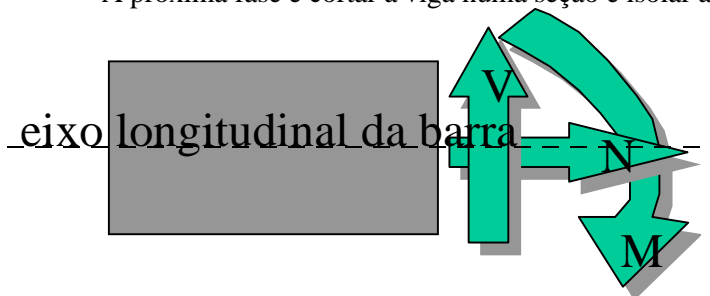
Apesar de na prática uma estrutura possuir três dimensões, podemos reduzir este sistema em planos e semi-planos.

Focalizaremos nossa atenção em estruturas bidimensionais ou planas, e principalmente em vigas, uma vez que podem ser encontradas em edificações e elementos de máquinas.

Nos problemas planos, onde a peça estrutural e forças estão em um plano único, tal como o plano  $y-z$ , as relações de equilíbrio estático ( $\Sigma F_z = 0$ ;  $\Sigma F_y = 0$ ;  $\Sigma M_x = 0$ ), já devem ser familiares e dominadas seu uso pelos alunos.

O primeiro passo na análise deve ser feito na determinação das reações dos apoios de nossa viga.

A próxima fase é cortar a viga numa seção e isolar a parte selecionada.



O sentido positivo das componentes internas na seção cortada será visto mais adiante.

A força **N** é chamada Axial ou Normal.

A força **V** é chamada Cortante ou Radial.

**M** é chamada de momento fletor.

**Notar que **N** é a força paralela ao eixo longitudinal da viga.**

**Notar que **V** é a força perpendicular ao eixo longitudinal da peça (viga).**

**O momento **M** gira em torno do eixo perpendicular ao plano das forças aplicadas à viga.**

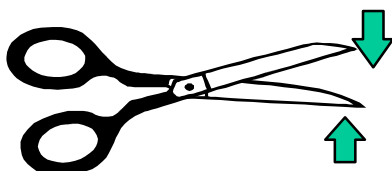
## FORÇAS AXIAIS (NORMAIS):

São aquelas que comprime ou tracionam a seção do corte. Serão consideradas positivas ou negativas segundo as ilustrações abaixo.



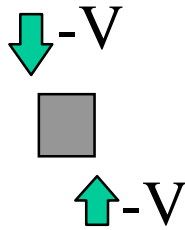
## FORÇAS RADIAIS (CORTANTES):

São aquelas paralelas a seção e perpendiculares ao eixo da peça.



Melhor exemplo é analisarmos o corte de uma tesoura. Verificando a seção que fica entre as lâminas, podemos observar:

Existe a tendência de girar a seção, entre as lâminas, para o seccionamento da peça.



A tendência de girar no sentido horário será considerado positivo.

**IMPORTANTE:** As forças Normais e Cortantes têm de ser representadas por suas escalares acompanhadas pelos sinais (+ou -), identificando o sentido das mesmas.

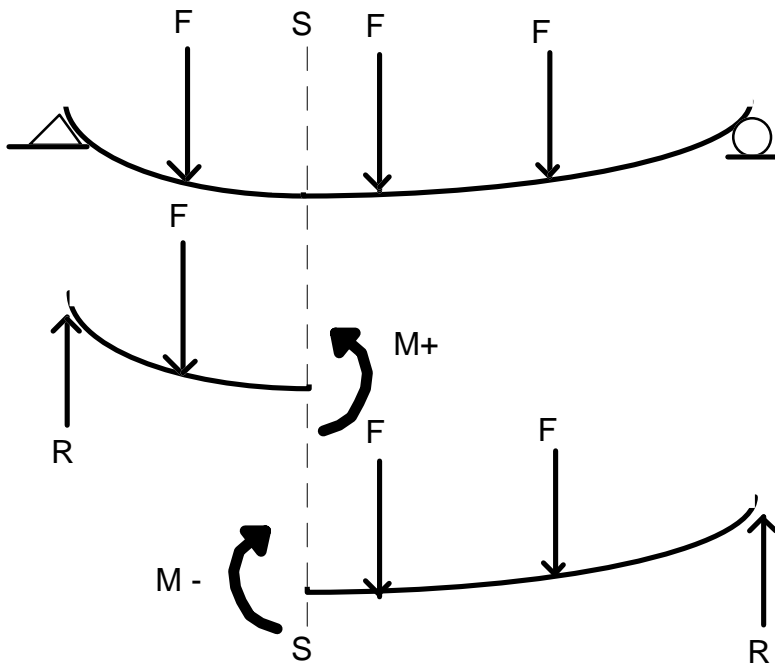
### MOMENTO FLETOR

A existência das forças cortante e normal em uma seção de uma viga assegura o equilíbrio do segmento  $\Sigma F_y = 0$  e  $\Sigma F_z = 0$ .

A outra condição de equilíbrio estático para a estrutura bidimensional é  $\Sigma M_x = 0$ . O equilíbrio será satisfeito por um momento interno resistente no plano transversal do corte da seção, para equilibrar o momento causado pelas forças externas.

O momento interno resistente deve agir na direção oposta ao momento externo, de forma a satisfazer a equação  $\Sigma M_x = 0$ .

Esses momentos tendem a fletir a viga no plano de carregamentos e são chamados de Momentos Fletores.

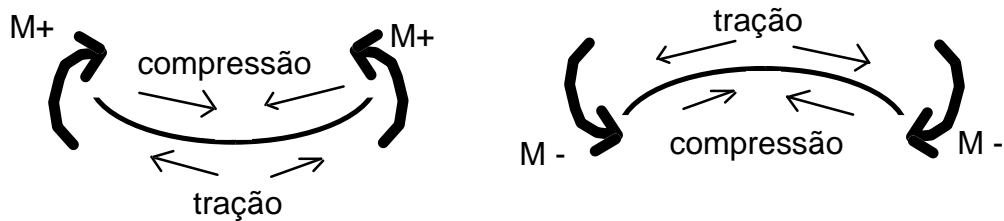


F  $\Rightarrow$  força de carregamento.

R  $\Rightarrow$  força de reação.

M  $\Rightarrow$  momento interno resistente considerado positivo.

Notar que o momento interno resistente considerado positivo provoca esforços axiais ao eixo longitudinal da viga, sendo: Esforços de tração na face inferior e compressão na face superior.

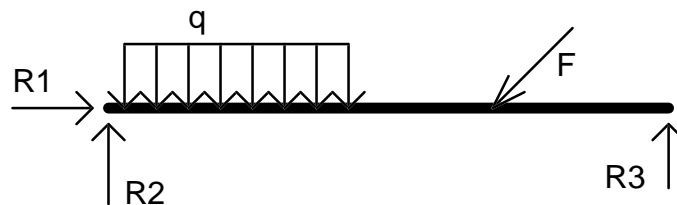


O momento fletor considerado negativo aplica forças de tração na face superior e compressão na face inferior.

### MÉTODO DAS SEÇÕES (PRINCÍPIO DO CORTE)

Todas as forças que agem sobre a viga, incluindo as de reação, são consideradas forças externas.

Assim se as forças que agem sobre o corpo satisfazem as equações de equilíbrio estático e todos atuam sobre ele, podemos representá-lo em um diagrama de corpo livre.



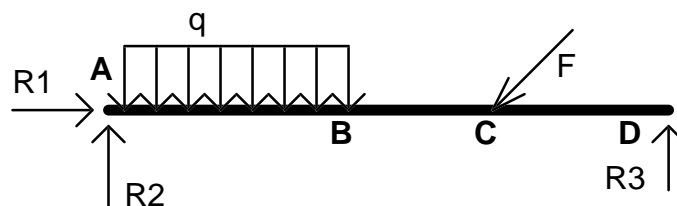
Se o sólido como um todo está em equilíbrio, qualquer parte dele também deve estar em equilíbrio.

Como a determinação das forças internas decorrentes das externas, é uma das principais preocupações da Resistência dos Materiais, uma seção arbitrária é passada pelo sólido, separando-o em duas partes.

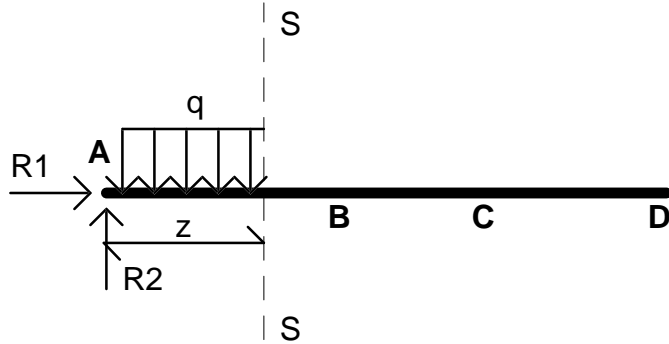
Esse processo é chamado de método das seções ou Princípio do Corte, e consiste das seguintes fases e análises.

1 – Por meio do arranjo das cargas externas (Ações e Reações) convém desenhar um diagrama do corpo livre, como desenhado acima.

2 – Identifique as forças aplicadas nos respectivos trechos de observação.

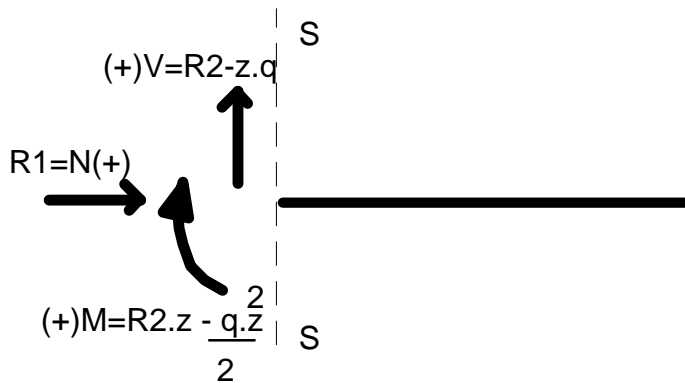


3 – Passa-se uma seção perpendicular ao eixo longitudinal do sólido, no trecho em estudo, ficando de um lado as forças externas e de outro o trecho (os trechos) do sólido sem as forças.



4 – No trecho investigado, o sistema de forças internas necessário ao equilíbrio da parte isolada é determinado.

Em geral, esse sistema de forças consiste uma força normal, uma cortante e um momento fletor.



**As forças internas são inversas para equilibrar o sistema.**

5 – Com o sistema de forças, no trecho, resolvido apropriadamente, avança-se ao outro trecho, e assim sucessivamente até ao último trecho.

## TRACADO DOS DIAGRAMAS DAS FORÇAS INTERNAS:

Pelo método discutido anteriormente, pode-se obter o escalar e sentido das forças Normal e Cortante, bem como o momento fletor em qualquer trecho da seção da viga.

Além do mais, com as convenções de sinais adotadas, podem ser traçados diagramas separados de cada função.

Em tais diagramas as ordenadas podem ser igualadas às quantidades calculadas. Utilizando uma escala adequada na ordenada vertical para as forças e momento, a partir de uma linha (eixo) horizontal de comprimento igual ao da viga.

A representação gráfica da função é obtida através da união dos pontos plotados nas ordenadas.

É conveniente fazer tais traçados diretamente abaixo do diagrama de corpo livre da viga.

Os gráficos devem ser representados individualmente, ou seja, um para as forças Normal e outro para Cortante, e outro para os Momentos Fletores.

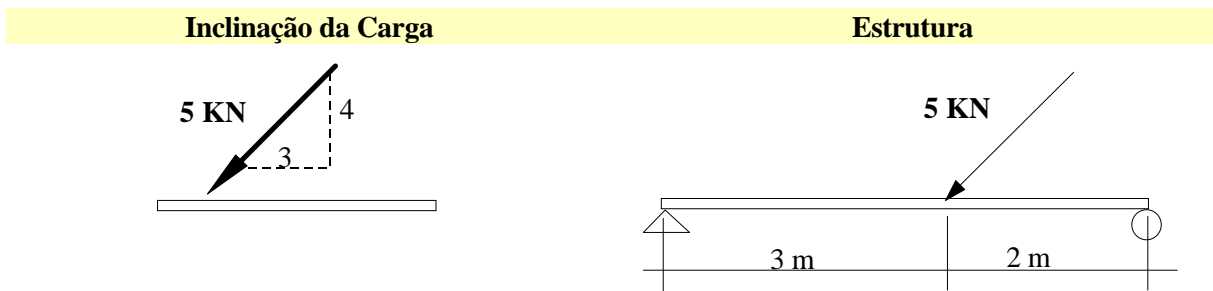
Sendos estes gráficos bem feitos, a partir deles, o projetista vê qual o desempenho necessário que a viga deve ter em cada trecho.

O processo descrito, da divisão da viga em seções e determinação das forças internas na seção, é fundamental, e os alunos devem aprendê-lo obrigatoriamente.

A seguir colocarei um exemplo que ilustra todo o procedimento descrito, passo a passo.

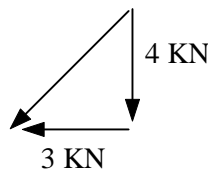
### Exemplo1:

Construa os diagramas de forças Normal, Cortante e de Momento Fletor para a viga, sem peso, sujeita à força inclinada  $F = 5 \text{ KN}$ .



#### 1º Passo:

Arranjo do Carregamento nas componentes horizontal e vertical.



#### 2º Passo:

Substituir o carregamento pelo “arranjo de forças” e calcular as reações nos apoios, identificando os trechos da estrutura com letras.

$$\Sigma F_z = 0$$

$$\mathbf{R_{AZ} = 3 \text{ KN}}$$

$$\Sigma M_B = 0$$

$$R_{AY} \cdot 5 - 4 \cdot 2 = 0$$

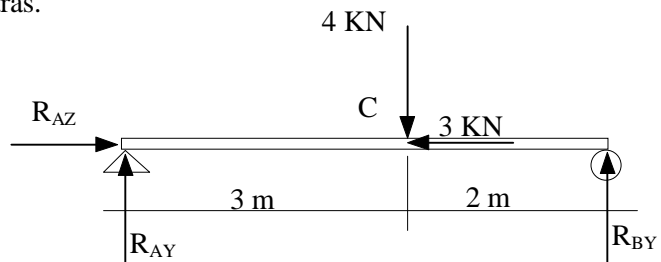
$$\mathbf{R_{AY} = 1,6 \text{ KN}}$$

$$\Sigma F_y = 0$$

$$R_{AY} + R_{BY} - 4 = 0$$

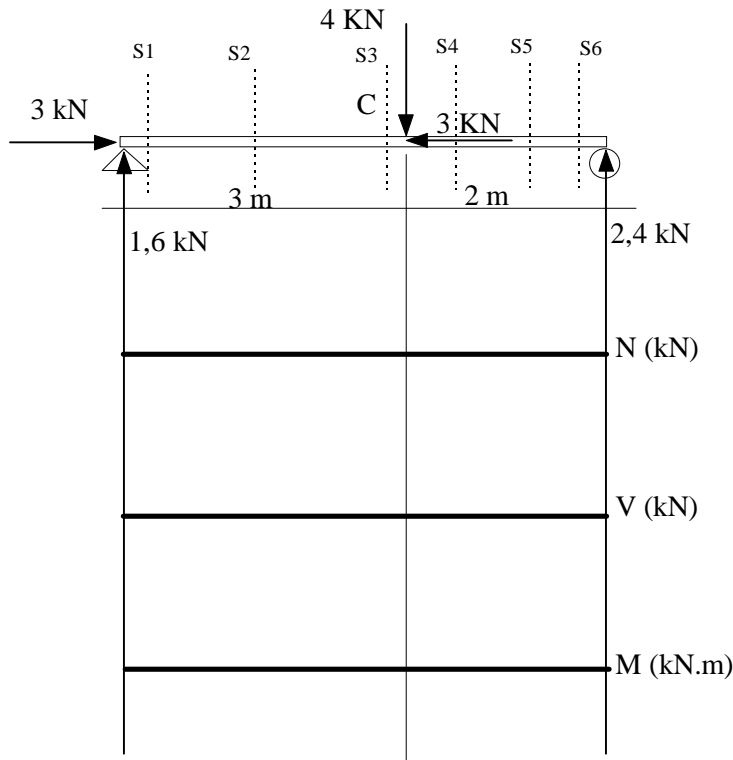
$$1,6 + R_{BY} - 4 = 0$$

$$\mathbf{R_{BY} = 2,4 \text{ KN}}$$



3º Passo:

Desenhe o diagrama de corpo livre (somente forças externas) e posicione abaixo os gráficos para a Normal, Cortante e Momento Fletor.



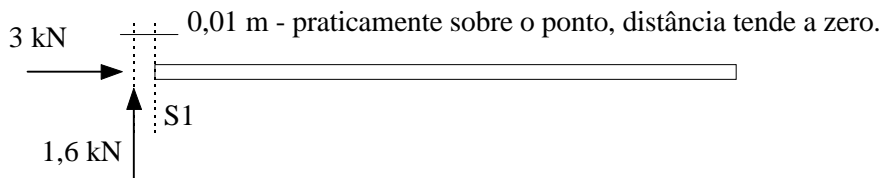
As seções devem ser examinadas em cada início e fim de trecho.

4º Passo:

Caminhar pelos trechos, da esquerda para a direita, aplicando as equações  $\Sigma F_z=0$ ,  $\Sigma F_y=0$ ,  $\Sigma M=0$  em cada seção.

- S1** o mais próximo ao ponto A, quase sobre o ponto ( $\sim 0,1$  m do ponto A).
- S2** aproximadamente no centro do trecho AC,  $\sim 1,5$  m de distância do ponto A
- S3** o mais próximo do ponto C,  $\sim 2,99$  m de A
- S4** logo após o ponto C,  $\sim 3,10$  m de A
- S5** na metade do trecho CB,  $\sim 4,00$  m do ponto A
- S6** mais próximo ao ponto B,  $\sim 4,99$  m do ponto A.

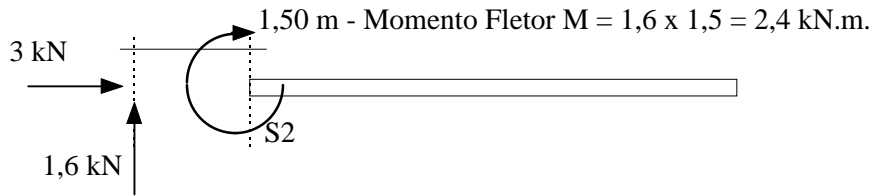
Lembrando sempre: “Cargas de um lado e somente a barra (viga) do outro”.



Força Normal de 3 kN comprime a barra.

Força Cortante de 1,6 kN, “tende” a girar a seção no sentido horário.

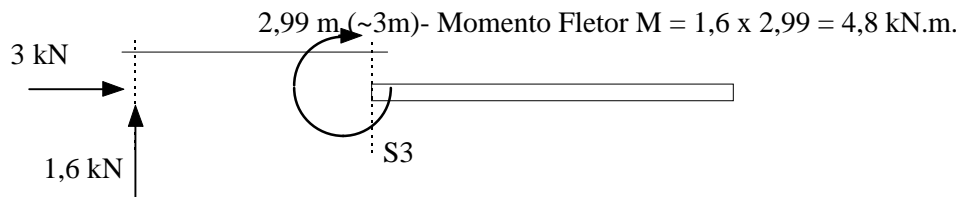
Momento Fletor é nulo, porque a distância é praticamente zero.



Força Normal (N), continua comprimindo a barra com 3 kN.

Força Cortante (V) de 1,6 kN, continua “tendendo” a girar a seção no sentido horário.

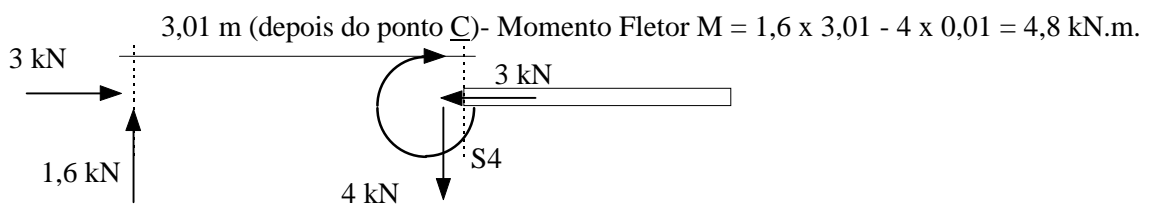
Momento Fletor (M) é de  $1,6 \text{ kN} \times 1,5 \text{ m} = 2,4 \text{ kN.m}$  - girando no sentido horário e tracionando a parte inferior da seção.



$N = 3 \text{ kN}$  (compressão) (-)

$V = 1,6 \text{ kN}$  (sentido horário) (+)

$M = 1,6 \times 2,99 = \sim 4,8 \text{ kN.m}$  (sentido horário - tração na parte inferior da peça).

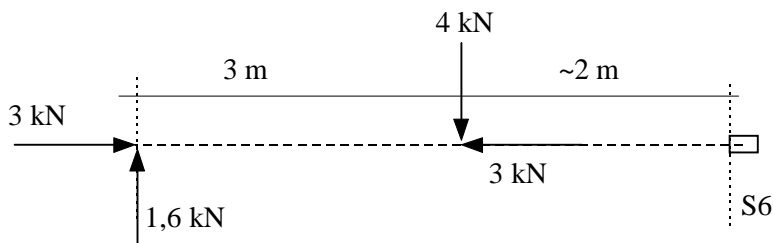


$N = 3 - 3 = 0$

$V = 1,6 - 4 = -2,4 \text{ kN}$  (tende a girar no sentido anti-horário)

$M = 1,6 \times 3,01 - 4 \times 0,01 = \sim 4,8 \text{ kN.m}$

Assim por diante nas várias seções até a seção S6:



$N = 3 - 3 = 0$

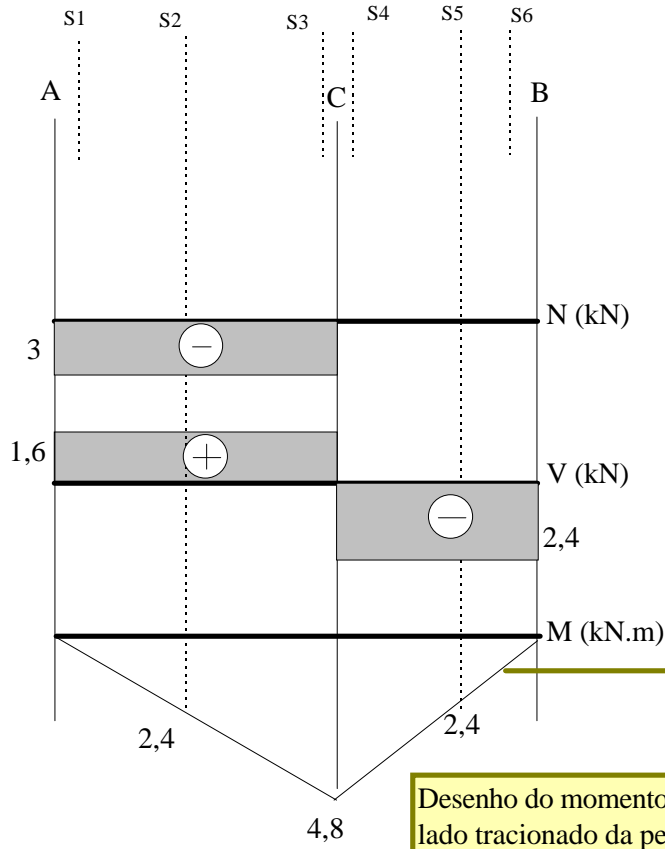
$V = 1,6 - 4 = -2,4 \text{ kN}$

$M = 1,6 \times (\sim 5 \text{ m}) - 4 \times (\sim 2 \text{ m}) = 0$

Importante: O último ponto, neste caso o ponto B, nunca é incluído no exame do trecho.

5º Passo:

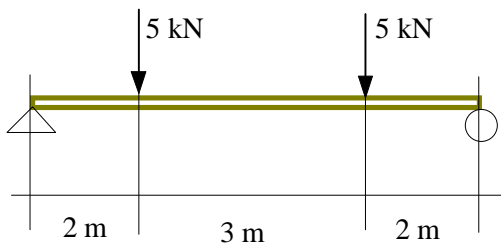
“Plotar” os pontos nas ordenadas, ligando-os e traçando os diagramas (gráficos) dos Esforços Internos Solicitantes de cada trecho.



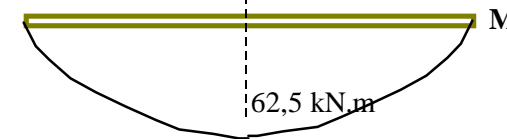
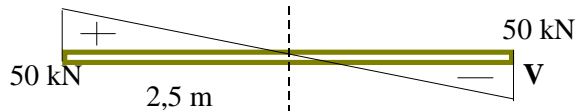
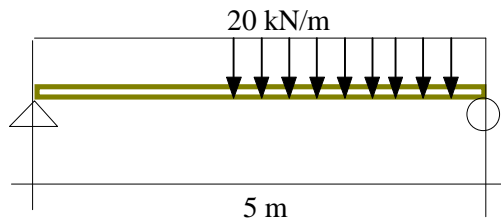
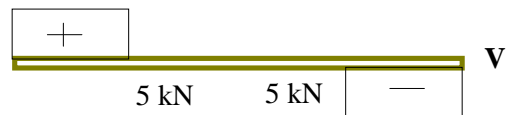
“Quando o diagrama da Força Cortante for uma reta paralela ao eixo longitudinal da barra o diagrama de Momento Fletor será uma reta inclinada”.

Desenho do momento indica o lado tracionado da peça

Tente fazer os seguintes exemplos:



Respostas Esperadas:



Quando o diagrama da Força Cortante é uma reta inclinada o diagrama de Momento Fletor é uma parábola