

## Flambagem por Compressão

### Conceito de estabilidade do equilíbrio.

De forma bastante comum ocorre confusão entre o que são equilíbrio e estabilidade. Uma estrutura pode ser instável estando em equilíbrio.

Tome, por exemplo, um lápis apontado e tente coloca-lo apoiado em um plano horizontal apoiado pela ponta. Nesta situação, embora ele esteja em equilíbrio, este é muito instável. Quando se apóia o lápis pela base, o equilíbrio é estável. Isto pode ser observado na figura 1

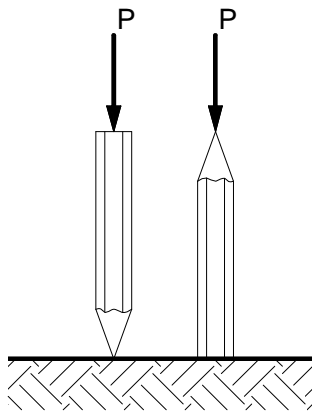


Figura 1 – Equilíbrio estável e instável

Em geral, o equilíbrio de uma estrutura pode ser classificado como: estável; instável ou indiferente.

Um modo bastante simples de observar este fato é analisar as três situações de equilíbrio apresentadas na figura 2.

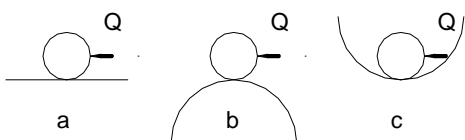


Figura 2 – Situações de equilíbrio

A situação **a** representa o equilíbrio indiferente. Nela, ao se aplicar a força **Q** na esfera, que está sobre um plano, representado pela linha horizontal, ocorrerá uma nova posição de equilíbrio, semelhante a esta em outro ponto qualquer do plano.

Na situação **b**, o equilíbrio é instável. A força **Q** promove um deslocamento na esfera que rola sobre a superfície não existindo mais a possibilidade de retorno a esta posição de equilíbrio. Uma estrutura com este tipo de equilíbrio não suporta perturbações de nenhuma natureza.

Na situação **c**, o equilíbrio é estável. A força **Q** promove um deslocamento na esfera que rola sobre a superfície oscilando em torno da posição de equilíbrio inicial.

### Carga crítica de barras comprimidas.

Seja uma barra prismática comprimida, em equilíbrio, como a mostrada na figura 3.

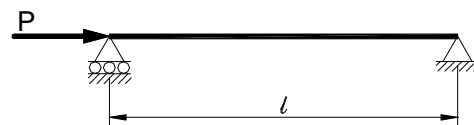


Figura 3 – Barra comprimida em equilíbrio

Quando a força tem valores pequenos, a barra permanece reta e o equilíbrio é estável. Quando ocorre um determinado aumento no valor desta força, podem aparecer flechas nas seções da barra levando a barra para um novo equilíbrio estável, como representa a figura 4.

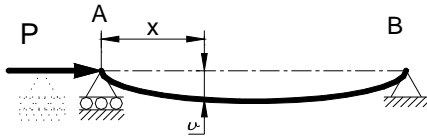


Figura 4 – Barra comprimida em uma nova posição de equilíbrio

A passagem do primeiro estado de equilíbrio estável para o outro, ocorre quando a força atinge um determinado valor que é chamado de **Valor Crítico**. Nessa situação a carga é chamada de **Carga Crítica** e indicada por  $P_{crit}$ .

Quando a carga está no valor crítico o equilíbrio torna-se instável.

Nos dimensionamentos das estruturas é importante que este valor crítico não seja alcançado. Com isto, se garante, além da integridade, a estabilidade da estrutura.

### Determinação da Carga Crítica.

Na figura 4, se observa a ocorrência de flechas nas seções da barra. Torna-se possível, então escrever a equação da linha elástica para a barra.

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = -\frac{M}{E \times I} \quad (1)$$

Para uma seção qualquer, com distância igual a  $x$ , a partir do apoio **A** o momento fletor vale  $M = P \times v$  que, substituído na expressão 1, resulta:

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = -\frac{P \times v}{E \times I} \rightarrow$$

$$\boxed{\frac{d^2 v}{dx^2} + \frac{P \times v}{E \times I} = 0} \quad (2)$$

A expressão 2 é uma diferencial de segunda ordem cuja solução é:

$$v = C_1 \cos\left(\sqrt{\frac{P}{E \times I}} x\right) + C_2 \sin\left(\sqrt{\frac{P}{E \times I}} x\right) \quad (3)$$

onde  $C_1$  e  $C_2$  são constantes que devem ser determinadas de maneira a satisfazer as condições de deslocamento das extremidades apoiadas; ou seja:

$$\begin{aligned} \text{para } x = 0 &\Rightarrow v = 0 \quad \text{e} \\ \text{para } x = l &\Rightarrow v = 0 \end{aligned}$$

Com  $x = 0$ , se tem

$$0 = C_1 \cos(0) + C_2 \sin(0) \rightarrow$$

$$0 = C_1 \times 1 + C_2 \times 0 \rightarrow$$

$$\boxed{C_1 = 0} \quad (4)$$

Com este resultado a expressão 3 se resume a:

$$v = C_2 \sin\left(\sqrt{\frac{P}{E \times I}} x\right) \quad (4)$$

Com  $x = l$ , tem-se:

$$0 = C_2 \sin\left(\sqrt{\frac{P}{E \times I}} \times l\right) \quad (5)$$

Note-se, aqui, que para satisfazer a equação, independentemente do valor de  $C_2$ , a função seno deve ser igual a zero. Esta função é nula quando o ângulo for igual a  $n\pi$ , ou seja:

$$\sqrt{\frac{P}{E \times I}} \times l = n\pi \quad (6)$$

onde:

$$n=0; 1; 2; 3; \dots\dots$$

Assim, tem-se:

$$\sqrt{\frac{P}{E \times I}} \times l = n\pi \rightarrow$$

$$\frac{P}{E \times I} \times l^2 = n^2 \pi^2 \rightarrow$$

$$P = \frac{n^2 \times \pi^2 \times E \times I}{l^2} \quad (7)$$

Note-se que  $n$  é um número inteiro, positivo, qualquer entre 1 e  $\infty$ . Para cada valor de  $n$  existe um valor de  $P$  que muda o estado de equilíbrio. Cada um destes valores é indicado por  $P_{crit}$ .

Desta forma com:

$$n=1 \rightarrow P_{crit1} = \frac{\pi^2 \times E \times I}{l^2} \quad (8)$$

$$n=2 \rightarrow P_{crit2} = \frac{4 \times \pi^2 \times E \times I}{l^2} \quad (9)$$

Importante se torna observar que estas cargas críticas são as cargas que mudam o estado de equilíbrio. Assim, a carga crítica encontrada para  $n=1$  muda o estado de equilíbrio de uma barra reta para uma barra que tem a forma da figura 5. Nesta situação se diz que ocorreu a flambagem da barra por compressão.

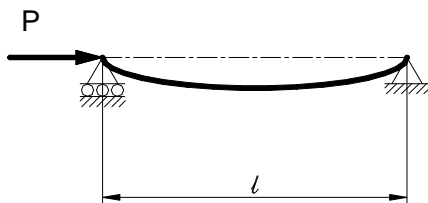


Figura 5 – Barra flambada com  $P_{crit}$  para  $n=1$

A carga crítica encontrada para  $n=2$  muda o estado de equilíbrio de uma barra que tem a forma da figura 4 para uma que tem a forma da figura 6.

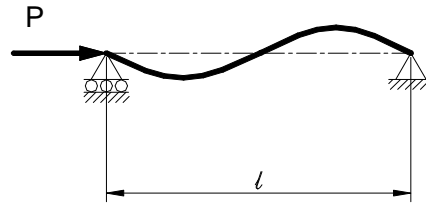


Figura 6 – Barra flambada com  $P_{crit}$  para  $n=2$

Para as estruturas, em geral, se interessa descobrir a carga crítica para  $n=1$ . No presente capítulo far-se-á esta consideração.

Um fato importante de ser lembrado é que a solução da expressão 3 foi encontrada através das condições de apoio da barra. Isto significa que para barras apoiadas de forma diferente, a solução será diferente. Mais à frente este fato será abordado.

### Equação de Eüler

Toma-se, inicialmente a expressão 8 que é a carga crítica para a flambagem de uma barra prismática simplesmente apoiada em suas extremidades.

Lembra-se, mais uma vez, que a carga crítica é aquela que muda o estado de equilíbrio; assim, com cargas de menor valor que ela a barra permanece reta e com cargas de maior valor, ela flamba da forma da figura 5, até que o valor seja igual ao da encontrada para  $n=2$ .

Lembrando que esta carga é uma força normal de compressão, o módulo da tensão normal desenvolvida nos pontos das

seções transversais da barra prismática é:

$$\sigma = \frac{P_{\text{crit}}}{A} \quad (10)$$

onde  $A$  é a área da seção transversal da barra.

A esta tensão se dá o nome de **Tensão de Flambagem** que é indicada por  $\sigma_{\text{fl}}$ .

$$\sigma_{\text{fl}} = \frac{P_{\text{crit}}}{A} \quad (11)$$

A tensão de flambagem é portanto a tensão que muda o estado de equilíbrio da barra ou seja, com tensões iguais a este valor o equilíbrio é instável.

Substituindo o valor da carga crítica, encontrado na expressão 8, na expressão 11, tem-se:

$$\sigma_{\text{fl}} = \frac{\pi^2 \times E \times I}{l^2 \times A} \rightarrow$$

$$\sigma_{\text{fl}} = \frac{\pi^2 \times E \times I}{l^2 \times A} \quad (12)$$

Sabendo-se que o raio de giração de uma figura ( $i$ ) é igual a:

$$i = \sqrt{\frac{I}{A}} \rightarrow i^2 = \frac{I}{A} \quad (13)$$

a expressão 12 fica:

$$\sigma_{\text{fl}} = \frac{\pi^2 \times E \times i^2}{l^2} \quad (14)$$

Observe-se que na expressão 14  $l$  é o comprimento da barra e  $i$  é uma propriedade de sua seção transversal.

Podemos escrever esta expressão então como:

$$\rightarrow \sigma_{\text{fl}} = \frac{\pi^2 \times E}{\frac{l^2}{i^2}} \rightarrow$$

$$\sigma_{\text{fl}} = \frac{\pi^2 \times E}{\left(\frac{l}{i}\right)^2} \quad (15)$$

Na expressão 15, o quociente  $\frac{l}{i}$  é chamado de **Índice de Esbeltez** da barra e indicado pela letra  $\lambda$ .

$$\lambda = \frac{l}{i} \quad (16)$$

O índice de esbeltez é uma medida relativa entre o comprimento da barra e sua seção transversal. Uma barra é esbelta quando seu comprimento é grande perante sua seção transversal.

Assim, a expressão 15 fica:

$$\sigma_{\text{fl}} = \frac{\pi^2 \times E}{\lambda^2} \quad (17)$$

Esta expressão é conhecida como Equação de Eüler.

OBS:-

1. A tensão de flambagem é um valor de tensão que, se atingido, muda o estado de equilíbrio da barra, isto é; a barra flamba.
2. Para que em uma barra não ocorra a flambagem, o valor de tensão desenvolvida pela força de compressão atuante, deve ser menor que

o da tensão de flambagem. Isto é:

$$\sigma = \frac{P}{A} \leq \bar{\sigma}_{fl} \quad (18)$$

onde

$$\bar{\sigma}_{fl} = \frac{\sigma_{fl}}{\gamma} \quad (19)$$

e  $\gamma$  é o coeficiente de segurança que se deseja usar.

- O estudo do raio de giração é de grande importância já que, se não existir restrição a barra tende a flambar de maneira que a seção gire em torno do eixo central de inércia de menor momento e portanto, de menor raio de giração
- A mudança na forma de apoio da barra, provoca alteração na solução da expressão 3. Esta alteração, pode ser expressa por meio do índice de esbeltez.
- A forma geral do índice de esbeltez é:

$$\lambda = k \times \frac{l}{i} \quad (20)$$

onde  $k$  é um coeficiente que depende da forma de apoio da barra.

- Os valores de  $k$  para diferentes formas de apoio são as mostradas na figura 7.

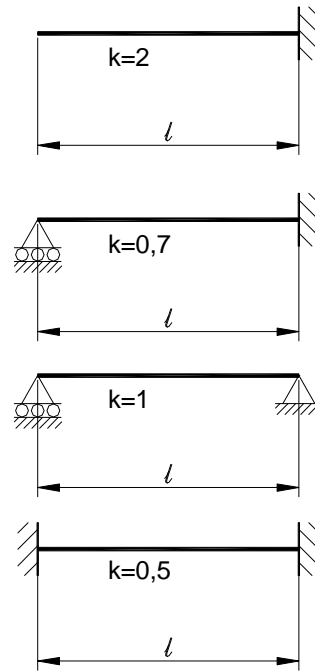


Figura 7 – Coeficientes k para diferentes formas de apoio.

### Flambagem Elástica e Flambagem Inelástica.

A expressão 17 mostra que a tensão de flambagem é função do índice de esbeltez da barra. Com ela, é possível traçar o gráfico da figura 8.

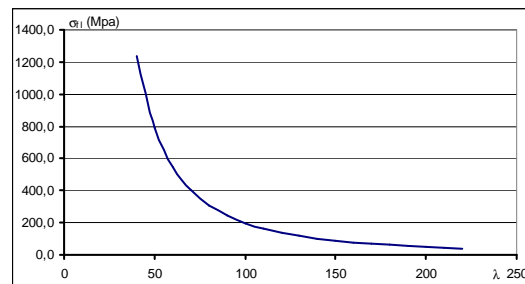


Figura 8 – Gráfico da tensão de flambagem em função do índice de esbeltez para  $E=200\text{GPa}$ .

Pela figura 8 é possível observar que barras com esbeltez muito pequena necessitam de uma tensão muito grande para que ocorra a flambagem.

Deve-se levar em conta também que, as expressões até

aqui obtidas possuem como premissa a validade da lei de Hooke. Esta lei tem validade desde que a tensão não ultrapasse a tensão limite de proporcionalidade do material ( $\sigma_p$ ).

Assim, a equação de Eüler possui validade para tensões abaixo de  $\sigma_p$ .

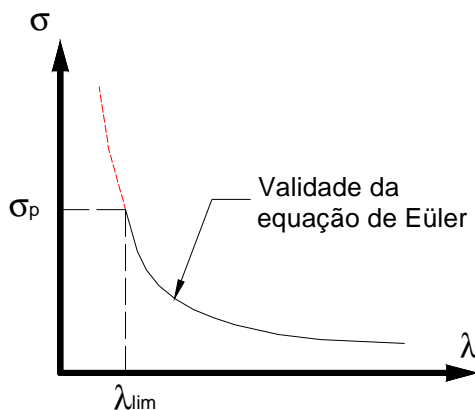


Figura 9 – Gráfico da tensão de flambagem em função do índice de esbeltez mostrando a validade da Equação de Eüler.

Na figura 9 está indicado o valor para  $\lambda$  onde a tensão necessária para a flambagem é  $\sigma_p$ . A este valor, se dá o nome de Índice de esbeltez limite e se indica por  $\lambda_{lim}$ .

A primeira vista, se pode imaginar que barras com esbeltez menor que o limite não apresentam o fenômeno da flambagem. Isto não é verdade, estas barras também podem apresentar flambagem. Para barras com índice de esbeltez muito pequeno, a falha por compressão pode ocorrer antes da mudança de estado de equilíbrio.

As equações que traduzem estes efeitos não podem estar baseadas na Lei de Hooke, já que a tensão desenvolvida é maior que a tensão limite de proporcionalidade.

Assim, é feita uma distinção entre a flambagem que segue a equação de Eüler – chamada de **Flambagem Elástica** – e a que não segue – chamada de **Flambagem Inelástica**.

Como já foi mencionada, a flambagem elástica segue a equação de Eüler, já a flambagem inelástica segue outro padrão de comportamento.

O padrão de comportamento da flambagem inelástica é muito dependente do material e os resultados possuem uma grande dispersão.

Algumas equações de aproximação são usadas para traduzir este comportamento. Uma das importantes aproximações foi feita por **Tetmajer** que aproxima o comportamento à função:

$$\sigma_{fl} = a - b\lambda + c\lambda^2 \quad (21)$$

onde a; b e c são constantes que dependem do material da barra.

A tabela 1 mostra os valores das constantes para alguns materiais.

Tabela 1 – Constantes a; b e c para alguns materiais para tensões em MPa.

Material	$\lambda_{lim}$	a	b	c
Aço st 37	105	303	1,16	0
Aço st 50	89	329	0,63	0
Ferro Fundido	80	764	12,2	0,05
Madeira	100	287	0,20	0
Aço ao Níquel	86	461	2,34	0
Alumínio	66	139	0,89	0

Outra aproximação importante foi feita por **Telêmaco V. Langendonck**, que propõe o comportamento como sendo uma parábola com vértice na tensão limite de escoamento ( $\sigma_e$ ).

A figura 9 representa este comportamento.

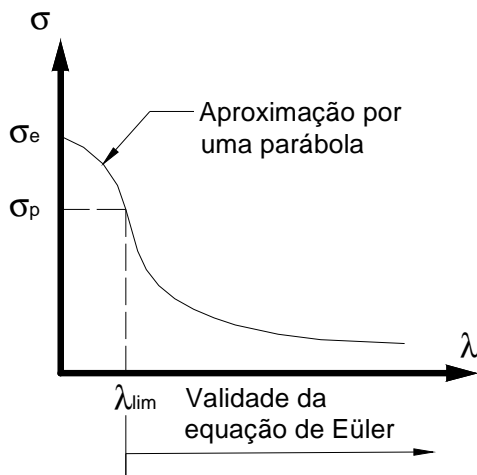


Figura 9 – Gráfico mostrando a validade da Equação de Eüler e a aproximação pela parábola.

A equação proposta por Telêmaco, para uma barra com um índice de esbeltez menor que limite é:

$$\sigma_{fl} = \sigma_e - \frac{\sigma_e - \sigma_p}{\lambda_{lim}^2} \times \lambda^2 \quad (21)$$

As aproximações que aqui são apresentadas não são as únicas existentes. Muitas outras são aceitas e para o dimensionamento de pilares existem normas, como as da AISC e a NBR 8800, que usam outras formulações.

De uma maneira geral, se pode dizer que quando a flambagem for elástica, a equação a ser usada é a Equação de Eüler. Quando ela for inelástica se pode usar uma das aproximações.